Programação em Lógica

Universidade do Vale do Rio dos Sinos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Bacharelado em Ciência da Computação
Profa. Ana Paula Lüdtke Ferreira

Premissas e conclusões

- Todos os números racionais podem ser expressos como o quociente de dois números inteiros.
- Contudo, pi não pode ser expresso como o quociente de dois números inteiros.
- Portanto, pi não é um número racional.
- Evidentemente, pi é um número.
- Logo, existe pelo menos um número não racional.

Lógica

- Lógica é o estudo dos argumentos
- Objetivos na Ciência da Computação
  - Desenvolvimento de linguagens de modelagem e especificação com o objetivo de permitir o raciocínio sobre situações e sistemas;
  - Desenvolvimento de argumentos sobre situações específicas, que possam ser validados ou refutados.

Exemplo de argumento

- Se o avião chegar atrasado e não houver táxis no aeroporto, então João chegará atrasado para sua reunião. João não chegou atrasado à reunião, mas seu avião chegou atrasado. Portanto, havia táxis no aeroporto.

Argumentos

- Todos os números racionais podem ser expressos como o quociente de dois números inteiros. Contudo, pi não pode ser expresso como o quociente de dois números inteiros. Portanto, pi não é um número racional. Evidentemente, pi é um número. Logo, existe pelo menos um número não racional.

Outro exemplo de argumento

- Se estiver chovendo e Maria não tiver levado sua sombrinha ela irá se molhar. Maria não se molhou, apesar de estar chovendo. Então Maria levou sua sombrinha com ela.

Comparando os dois

- Se o avião chegar atrasado e não houver táxis no aeroporto, então João chegará atrasado para sua reunião. João não chegou atrasado à reunião, mas seu avião chegou atrasado. Portanto, havia táxis no aeroporto.
- Se estiver chovendo e Maria não tiver levado sua sombrinha ela irá se molhar. Maria não se molhou, apesar de estar chovendo. Então Maria levou sua sombrinha com ela.

O mesmo argumento

(Mas sem avião, chuva, táxis e sombrinhas)

Se p e não q então r. Não r. p. Então q.

Se p e não q então r. Não r. p. Então q.

Se p e não q então r. Não r. p. Então q.

Comparando de novo

- Se o avião chegar atrasado e não houver táxis no aeroporto, então João chegará atrasado para sua reunião. João não chegou atrasado à reunião, mas seu avião chegou atrasado. Portanto, havia táxis no aeroporto.
- Se estiver chovendo e Maria não tiver levado sua sombrinha ela irá se molhar. Maria não se molhou, apesar de estar chovendo. Então Maria levou sua sombrinha com ela.

Lógica matemática

- Foco na estrutura do argumento, e não no seu significado (que naturalmente tem interesse no domínio da aplicação)
- Necessidade de uma linguagem formal capaz de expressar sentenças que possuam uma estrutura lógica.

Estrutura de um argumento

- Argumentos diferentes podem possuir a mesma estrutura:
  - o avião está atrasado --- está chovendo
  - há táxis no aeroporto --- Maria levou sua sombrinha
  - João está atrasado --- Maria vai se molhar

Proposições

- Proposição - sentença declarativa com um valor verdade atribuído
- Sentenças declarativas:
  - A soma dos números 3 e 5 é o número 8.
  - Jane reagiu violentamente às acusações.
  - Todo número natural é resultado da soma de dois números primos.
  - Todos os marcianos gostam de pizza.

Lógica proposicional - sintaxe

- Alfabeto:
  - Conjunto infinitamente contável de *letras proposicionais*
  - Constantes para representação dos valores *verdadeiro* e *falso*
  - Conjunto finito de conectivos lógicos
  - Parênteses
- {p,q,r,s,t,...} ∪ {T,⊥} ∪ {¬,∧,∨,→,↔} ∪ {(,)}

Avaliação

- Uma *avaliação booleana* é um mapeamento υ do conjunto de fórmulas proposicionais no conjunto de valores verdade {v,f} tal que:
  - υ(T)=v, υ(⊥)=f
  - υ(¬x)= ¬ υ(x)
  - υ(x•y)= υ(x) • υ(y) para •∈ {∧,∨,→,↔}

Lógica proposicional - sintaxe

- Gramática:
  - Se x é uma letra proposicional, T ou ⊥, então x é uma fórmula da lógica proposicional;
  - Se x é uma fórmula da lógica proposicional, então ¬x também é uma fórmula da lógica proposicional;
  - Se x e y são fórmulas da lógica proposicional, então (x∧y), (x∨y), (x→y) e (x↔y) também são fórmulas da lógica proposicional.

Avaliação - exemplo

- Suponha uma fórmula contendo três letras proposicionais, p, q e r, onde υ(p)=v, υ(q)=f e υ(r)=f. A avaliação da fórmula ¬(p ∧ ¬q)→r é a seguinte:
  - υ(¬(p ∧ ¬q)→r)= υ(¬(p ∧ ¬q)) → υ(r)=
  - ¬(υ(p ∧ ¬q)) → υ(r)= ¬(υ(p) ∧ υ(¬q)) → υ(r)=
  - ¬(υ(p) ∧ ¬ υ(q)) → υ(r)=
  - ¬(v ∧ ¬f) → f= ¬(v ∧ v) → f= ¬v → f= f → f =
  - v

Lógica proposicional - semântica

x	y	T	∨	←	x	→	y	↔	∧	¬∧	¬↔	¬y	¬→	¬x	¬←	¬∨	⊥
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

Formalização de sentenças

- Está chovendo.
- Não está chovendo.
- Está chovendo ou nevando.
- Está chovendo e nevando.
- Está chovendo mas não está nevando.
- Não está chovendo nem nevando.
- Se não está chovendo, então está nevando.
- Não é verdade que se não está chovendo então está nevando.

Formalização de sentenças

- Não é verdade que se está nevando então está chovendo.
- Está chovendo se e somente se não está nevando.
- Não é verdade que está chovendo ou nevando.
- Se está nevando e chovendo, então está nevando.
- Se não está chovendo, então não é verdade que está nevando e chovendo.
- Ou está chovendo, ou está nevando e chovendo.
- Ou está chovendo e nevando ou está nevando mas não está chovendo.

Formalização de argumentos

- Hoje é um fim-de-semana se e somente se hoje é sábado ou domingo. Portanto, hoje é um fim-de-semana, uma vez que hoje é sábado.
- Hoje é um fim-de-semana se hoje é sábado ou domingo. Mas hoje não é um fim-de-semana. Portanto, hoje não é sábado e hoje não é domingo.
- A proposta de auxílio está no correio. Se os árbitros a receberem até sexta-feira, eles a analisarão. Portanto, eles a analisarão porque se a proposta estiver no correio, eles a receberão até sexta-feira.
- Ela não está em casa ou não está atendendo ao telefone. Mas, se ela não está em casa, então ela foi seqüestrada. E se ela não está atendendo ao telefone, ela está correndo algum outro perigo. Portanto, ela foi seqüestrada ou ela está correndo algum outro perigo.

Conseqüência lógica |—

- Diz-se que uma fórmula é uma *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas se sempre que estas forem verdadeiras aquela também seja verdadeira.
- Um argumento é dito *válido* se sua conclusão é conseqüencia lógica de suas premissas.

Formalização de argumentos

- Fazer a disciplina de lógica é uma condição necessária para se formar em Ciência da Computação na UNISINOS. Eu ainda não fiz a disciplina de lógica, então não sou formado em Ciência da Computação na UNISINOS.
- Entender matemática é condição necessária para ir bem na prova. Ir bem na prova é condição suficiente para passar de ano. Então entender matemática é condição necessária para passar de ano.

Formalização de argumentos

- Se Deus existe, então a vida tem significado. Deus existe. Portanto a vida tem significado.
- Deus não existe. Pois, se Deus existisse, a vida teria significado. Mas a vida não tem significado.
- Se o avião não tivesse caído, nós teríamos feito contato pelo rádio. Não fizemos contato pelo rádio. Portanto, o avião caiu.
- Se hoje é quinta-feira, então amanhã é sexta-feira. Se amanhã é sexta-feira, então depois de amanhã será sábado. Conseqüentemente, se hoje é quinta-feira, depois de amanhã será sábado.
- Hoje é um fim-de-semana somente se hoje é sábado ou domingo. Hoje não é sábado. Hoje não é domingo. Portanto, hoje não é um fim-de-semana.

Conseqüência Lógica

- Diz-se que uma fórmula é uma conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas se sempre que estas forem verdadeiras aquela também seja verdadeira.
- Um argumento é dito válido se sua conclusão é conseqüencia lógica de suas premissas.

Validade de argumentos

- Como se pode verificar a validade de um argumento da lógica proposicional?

Estruturas de argumentos

Alguns mamíferos são leões.
Todos os leões são carnívoros.
∴ Alguns mamíferos são carnívoros.

Algum M é L.
Todo L é C.
∴ Algum M é C.

Argumento válido?

Todos os homens são mortais.
Sócrates é homem.
∴ Sócrates é mortal.

Formalização deste argumento na lógica proposicional: p, q |- r

Análise da estrutura

Algum M é L.
Todo L é C.
∴ Algum M é C.

- O que significam M, L e C?
  - conjunto de objetos ou *classes de atributos*

Limites da lógica proposicional

A lógica proposicional trata das relações lógicas geradas pelos operadores $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$.

Mas a validade de alguns argumentos não depende somente desses operadores...

Alguns mamíferos são leões.
Todos os leões são carnívoros.
∴ Alguns mamíferos são carnívoros.

Enunciados categóricos

- Quantificador (todo, algum, nenhum,...)
- Classe de atributos (termo sujeito)
- Elo
- Classe de atributos (termo predicado)

Exemplos

- Todo A é B
  - Todos os homens são mortais.
- Algum A é B
  - Alguns dos meus colegas me odeiam.
- Nenhum A é B
  - Nenhum homem é mulher.
- Algum A não é B
  - Alguns homens não são altos.

Validade de argumentos

- Como verificar se a conclusão é conseqüência lógica das premissas?

Negação

- Alguns programas não funcionam.
  - O conjunto de todos os programas tem pelo menos um elemento em comum com o conjunto das coisas que não funcionam.
- Não é verdade que alguns programas funcionam.
  - Não existe nenhum programa que funcione, ou seja, o conjunto de todos os programas não tem nenhum elemento em comum com o conjunto das coisas que funcionam.

Formalização de argumentos

- Diagramas de Venn

Formalização de enunciados

1. Todas os programas funcionam.
2. Nenhum programa funciona.
3. Alguns programas funcionam.
4. Alguns programas não funcionam.
5. Qualquer coisa funciona.
6. Alguma coisa funciona.
7. Nem tudo funciona.
8. Nada funciona.
9. Qualquer coisa é um programa que funciona.

Lógica de Predicados

- Sistema lógico definido a partir dos conceitos de lógica proposicional e de enunciados categóricos.
- **Algum S é P** – existe um elemento do conjunto **S** que também é elemento do conjunto **P**.
  - Existe um elemento x, sendo que x é um elemento de S e x é um elemento de P.
- **Todo S é P** – qualquer elemento do conjunto **S** também é um elemento do conjunto **P**.
  - qualquer que seja o elemento x, se x é um elemento de S então x é um elemento de P.

Quantificação Existencial ∃

- ∃ - quantificador existencial, representando algum dos elementos de um universo.
  - $\exists x\ s(x)$ – existe um elemento x, e x pertence a s
- Algum S é P
  - $\exists x\ (s(x) \wedge p(x))$
- Algum S não é P
  - $\exists x\ (s(x) \wedge \neg p(x))$

Formalização de enunciados

1. João e Pedro são mecânicos.
2. Se Maria é psicóloga, então ela não é enfermeira.
3. Maria ama João.
4. João ama a si próprio.
5. João ama todo mundo.
6. Todo mundo ama João.
7. Qualquer pessoa ama a si mesma.
8. Existe alguém que se ama.
9. Existe alguém que Maria não ama.

Quantificação Universal ∀

- ∀ - quantificador universal, representando a totalidade dos elementos de um universo.
  - $\forall x\ s(x)$ – para qualquer x, x pertence a s
- Todo S é P
  - $\forall x\ (s(x) \rightarrow p(x))$
- Nenhum S é P
  - $\forall x\ (s(x) \rightarrow \neg p(x))$

Formalização de enunciados

11. Existe alguém que tanto João quanto Maria amam.
12. Todo mundo ama todo mundo.
13. Alguém ama alguém.
14. Existe alguém que ama todo mundo.
15. Todo mundo é amado por alguém.
16. Todo aluno é mais novo do que algum professor.
17. Nem todos os pássaros são capazes de voar.

Predicados e nomes próprios

- Nem todos os enunciados contém quantificadores. Existem enunciados do tipo sujeito-predicado, os quais atribuem uma propriedade a uma pessoa ou coisa.
- Exemplos:
  - Sócrates é mortal → mortal(sócrates)
  - João é homem → homem(joão)

Formalização de enunciados

18. Faltou luz e todos os computadores estão desligados.
19. Se faltou luz, então todos os computadores estão desligados.
20. Algumas coisas estão ligadas e outras não estão.
21. Ou qualquer coisa está ligada ou nada está ligado.
22. Qualquer coisa ou está ligada ou não está ligada.
23. Todos os programas são programas.
24. Somente programas funcionam.
25. Se nada funciona, então não existem programas que funcionem.

Sintaxe

- Alfabeto:
  - Conjunto infinitamente contável de símbolos predicativos
  - Conjunto infinitamente contável de constantes
  - Conjunto infinitamente contável de variáveis
  - Constantes para representação dos valores verdadeiro e falso
  - Conjunto finito de conectivos lógicos
  - Quantificadores existencial e universal
  - Parênteses e vírgula

Sintaxe

- Convenção de prioridade dos operadores:
  - $\neg$, $\forall x$, $\exists x$
  - $\wedge$
  - $\vee$
  - $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$

Sintaxe

- Termo
  - Qualquer variável é um termo
  - Qualquer constante é um termo
- Fórmula atômica
  - Se P é um símbolo predicativo de aridade n e $t_1,t_2,...,t_n$ são termos, então $P(t_1,t_2,...,t_n)$ é uma *fórmula atômica*.

Substituição

- $\forall x$ F(x) → substituindo *x* por qualquer elemento *a*, F(*a*) é verdadeiro.
- Dadas uma variável *x*, um termo *t* e uma fórmula ϕ, define-se $\phi[t/x]$ como sendo a fórmula obtida pela substituição em ϕ de todas as *ocorrências livres* da variável *x* pelo termo *t*.

Sintaxe

- Fórmulas
  - Toda fórmula atômica é uma fórmula,
  - Se ϕ é uma fórmula, então $\neg(\phi)$ também é uma fórmula,
  - Se ϕ e φ são fórmulas, então $(\phi\wedge\varphi)$, $(\phi\vee\varphi)$, $(\phi\rightarrow\varphi)$ e $(\phi\leftrightarrow\varphi)$ também são fórmulas,
  - Se ϕ é uma fórmula e *x* é uma variável, então $(\forall x\ \phi)$ e $(\exists x\ \phi)$ também são fórmulas,
  - Nada mais é uma fórmula.

Substituições

- $\phi \equiv \exists x\ (P(y,z)\wedge(\forall y(\neg Q(y,x)\vee P(y,z))))$
  - $\phi[w/x]$
  - $\phi[w/y]$
  - $\phi[f(x)/y]$
  - $\phi[g(y,z)/z]$

Semântica

- $(p\vee \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
  - como pode ser avaliado o valor verdade dessa fórmula?
- $\forall x\exists y((p(x) \vee \neg q(y)) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(y)))$
  - e essa fórmula, como avaliar o seu valor verdade?

Avaliação

- $\exists x\ \phi$
  - se para algum valor concreto de x, ϕ é verdadeira então esta fórmula é verdadeira; se para nenhum valor possível de x ϕ for verdadeira, então a fórmula é falsa.
- $\forall x\ \phi$
  - se para todos os valores possíveis de x, ϕ é verdadeira então a fórmula é verdadeira; se para algum valor concreto de x ϕ for falsa, então a fórmula é falsa.

Avaliação

- $\forall x\exists y((p(x) \vee \neg q(y)) \rightarrow (q(x) \rightarrow p(y)))$
- Problemas:
  - significado dos quantificadores,
  - dependências entre variáveis quantificadas e predicados,
  - parâmetros reais de p e q.

Avaliação

- A avaliação de uma fórmula da lógica de predicados requer:
  - um universo fixo de valores concretos (as coisas das quais estamos falando),
- e depende de (e varia com):
  - os valores escolhidos para as variáveis,
  - o significado dos predicados envolvidos.

Avaliação

- $\forall x\exists y\ r(x,y)$ é diferente de $\exists y\forall x\ r(x,y)$. Por que?
  - variáveis são locais que podem conter qualquer ou algum valor não especificado previamente:
    - animais, plantas, fórmulas matemáticas, programas, estruturas de dados, etc.

Avaliação

- Se as variáveis podem conter somente um número finito de valores, então não há problema...
- Mas mesmo assim, precisamos saber o que significam os predicados...
  - p(x,y)
    - o valor retornado pelo programa x é menor ou igual ao retornado pelo programa y, ou
    - x é menor ou igual a y, ou
    - x é um dos elementos da lista y, ou...

Modelos

- Seja F um conjunto de símbolos de funções e P um conjunto de símbolos predicativos, cada símbolo com uma aridade fixa. Um modelo M para o par (F,P) consiste no seguinte conjunto de dados:
  - um conjunto não vazio A, chamado de *universo de valores concretos*,
  - para cada $f \in F$ com aridade n, uma função concreta $f^M : A^n \rightarrow A$, e
  - para cada $p \in P$ com aridade n, um conjunto $P^M \subseteq A^n$ de n-tuplas sobre A.

Algumas fórmulas...

- $\forall x \, ((x \leq x \cdot \varepsilon) \wedge (x \cdot \varepsilon \leq x))$
- $\exists y \forall x \, (y \leq x)$
- $\forall x \exists y \, (y \leq x)$
- $\forall x \forall y \forall z \, ((x \leq y) \rightarrow (x \cdot z \leq y \cdot z))$
- $\neg \exists x \forall y \, ((x \leq y) \rightarrow (y \leq x))$

Exemplo

- F={+,–,×,s}, P={=, ≤, <, zero}
- Aridade de +,–,×,=, ≤ e < é 2 e de s e zero é 1.
- Modelo:
  - o universo de valores concretos A é o conjunto dos números naturais,
  - $+^M, -^M, \times^M$ tomam valores concretos e retornam, respectivamente, sua soma, diferença e produto, e s^M, retorna o valor de seu argumento adicionado de 1.
  - os predicados $=^M, \leq^M, <^M$ retornam as relações *igual a*, *menor ou igual a* e *estritamente menor a*. O predicado zero retorna T se seu argumento é o número 0 e F caso contrário.

Outro exemplo

- F={ε,·} e P={≤}, ε é uma constante, · é uma função de dois argumento e o predicado ≤ tem aridade 2.
- Modelo:
  - A é o conjunto de todas as strings binárias,
  - ε^M é a palavra vazia, $\cdot^M$ é a operação de concatenação de strings e $\leq^M$ é o predicado que, tomando duas constantes, é verdadeiro se a primeira é prefixo da segunda e falso caso contrário.