NOTAS DE LÓGICA

Sistemas Formais e Lógica Proposicional

(TEXTO EM ELABORAÇÃO)

(ÚLTIMA ALTERAÇÃO 01-04-2003)

⋆ ⋆ ⋆

DÉCIO KRAUSE
Núcleo de Epistemologia e Lógica
Departamento de Filosofia
Universidade Federal de Santa Catarina

FLORIANÓPOLIS
2003

Prefácio

ESTE É UM TEXTO introdutório de lógica e de sua filosofia. Apresentando uma iniciação à parte mais básica da lógica, a chamada lógica proposicional, aproveitaremos para dicorrer sobre os sistemas lógicos em geral e sobre vários dos principais conceitos envolvidos. Deste modo, esperamos que não somente o leitor aprenda algo de lógica, mas a *entenda*, o que certamente é a parte mais difícil. A lógica é uma disciplina que desenvolveu-se enormemente a partir de meados do século XIX, tendo alcançado resultados que em nada ficam devendo, seja em alcance, seja em profundidade, a qualquer área da matemática ou mesmo das ciências empíricas. Ademais, sua contraparte filosófica tem grande relevância e importa para discussões em variados campos do saber. Presentemente, a lógica (melhor dizendo, os variados sistemas lógicos) tem encontrado aplicações as mais diversas, da filosofia à engenharia, passando pela matemática, pela computação e pelas ciências empíricas, fato este que não deve passar desapercebido pelo cientista ou pelo filósofo. Ademais, no decorrer do século XX, vários sistemas 'não-clássicos' foram elaborados, e pode-se sem dúvida sustentar que o surgimento das lógicas não-clássicas constitui fato de importância comparável ao aparecimento das geometrias não-euclidianas no século XIX. Trata-se de um fenômeno que pode ser dito constituir uma verdadeira 'revolução científica', ainda por ser devidamente entendida e explorada.

Adentrar a este campo, compreender o seu assunto ou mesmo valer-se de suas técnicas e conteúdos, seja para cultivar a lógica *qua* lógica, ou para discussões em outras áreas, requer disciplina e trabalho árduo. Não há outro modo de aprender algo de lógica sem trabalhar bastante. Também em lógica, como em geometria, não há *caminho real*.[1] Como ressaltou o matemático Yuri

[1]Em seu livro de história da matemática, Carl Boyer menciona uma passagem de Proclus Diadocus: "Ptolomeu uma vez perguntou a Euclides se havia um caminho mais curto para a geometria do que o estudo dos *Elementos*, e Euclides lhe respondeu que não havia

Manin, contrariando uma opinião do grande lógico Barkeley Rosser, para quem uma vez que uma demonstração estivesse escrita em uma linguagem formal, ela poderia ser seguida até mesmo por um idiota (*a moron*), para Manin isso não se dá de forma alguma pois, segundo ele, a mente humana não está adaptada para trabalhar com textos formais [Man77, p. 38]. Em outras palavras, é preciso esforço, mais para uns, menos para outros.

Este texto apresenta algumas das noções básicas sobre os sistemas lógicos em geral, podendo servir como uma primeira introdução ao assunto. Esta primeira parte limita-se ao âmbito do chamado cálculo de proposições, seja pela sua simplicidade, seja porque basta para que conceitos fundamentais como os de *sistema formal*, de *teorema*, de *teoria consistente*, *contradição* etc. possam ser introduzidos e trabalhados de forma precisa, e para que a sua significação filosófica seja discutida. Um bom conhecimento desses e de outros conceitos certamente auxiliarão o leitor a compreender muito da filosofia do século XX e das bases da ciência presente. Um segundo volume está sendo planejado, contendo a Lógica de Primeira Ordem e com noções sobre as lógicas de ordem superior.

Iniciaremos o nosso estudo apresentando o conceito de Sistema (ou Teoria) Formal e, após a introdução de alguns conceitos básicos relacionados a esses sistemas, estuda-se o Cálculo Proposicional Clássico por meio de um sistema formal. Entremeio o texto, várias informações complementares e bibliografia adicional são fornecidas com a finalidade de relacionar o assunto com temas mais abrangentes, como sistemas envolvendo lógicas não clássicas e algumas sugestões acerca de teorias físicas. O texto segue muito de perto algumas partes do livro *Introduction to Mathematical Logic*, de Elliot Mendelson [Men87], que indicamos para leituras mais aprofundadas.

Este texto começou a ser preparado para seminários realizados na Universidade Federal de Santa Catarina, mas vários colegas sugeriram que ele poderia ser útil em geral, motivo pelo qual está sendo divulgado para um público mais amplo. Gostaria de agradecer a esses colegas sem precisar mencioná-los um a um, e sem que com isso queira comprometê-los com as eventuais falhas ou omissões que ainda se apresentam no texto.

Florianópolis, Março de 2003.

D. Krause

estrada real para a geometria"[Boy74, p. 74].

Conteúdo

Capítulo 1

Sistemas Formais

INICIAREMOS APRESENTADO o conceito de Sistema (ou Teoria) Formal, e então apresentaremos o Cálculo Proposicional Clássico por meio de um sistema formal, quando noções sintáticas e semânticas relevantes serão introduzidas, bem como serão apresentados alguns resultados meta-teóricos. Acreditamos que o estudo desta pequena parte da lógica atual tem grande importância, pois fornece excelente oportunidade para que se possam discutir conceitos que se aplicam a sistemas formais em geral e para estudos posteriores envolvendo quantificação, as lógicas de ordem superior, os fundamentos da teoria dos conjuntos, da matemática e mesmo da contraparte matemática das disciplinas das ciências empíricas.

O conceito de sistema formal sedimentou-se a partir do final do século XIX, em grande parte devido à contribuição do matemático alemão David Hilbert. Em linhas gerais, trata-se da contraparte formal de um sistema axiomático. Esses sistemas, ao que tudo indica, tiveram origem com os gregos antigos, como Arquimedes, tendo no entanto a obra de Euclides de Alexandria, os *Elementos* se tornado a referência mais popular quanto ao uso do método axiomático. Posteriormente, os sistemas axiomáticos foram utilizados amplamente, como por Issac Newton e vários outros cientistas. A diferença fundamental para os chamados sistemas axiomáticos *modernos*, originados principalmente com Hilbert, consiste em que os 'tradicionais' visavam descrever por meio de axiomas determinados domínios 'fixos' do conhecimento, sendo que esses axiomas deviam ser tomados, como se pensava à época, como 'verdades evidentes' acerca desses domínios. Hilbert mostrou que isso não precisa ser assim; dizia que a geometria não se alteraria em nada se palavras como *ponto*, *reta* e *plano* (que constavam dos axiomas de

Euclides) fossem substituídas respectivamente por *caneca*, *garrafa de cerveja* e *mesa*.[1] Isso veio indicar que os sistemas axiomáticos não precisam 'carregar' o significado intuitivo dos conceitos que encerram, ainda que esses em geral tenham algum significado quando da proposta do sistema. Esse conteúdo, no entanto, não deve desempenhar qualquer papel na derivação dos teoremas, que é o que fundamentalmente se busca com o uso de sistemas axiomáticos.

Neste texto, veremos uma introdução ao estudo desses sistemas. Acreditamos que as explicações sobre a sua importância, bem como uma mais ampla compreensão do seu papel, possa ser melhor alcançada após o leitor ter 'sujado as mãos' em alguma medida. Vamos portanto a isso sem demoras.

1.1 O conceito de sistema formal

Um *Sistema Formal* F é caracterizado quando são especificados os seguintes ítens:

(I) É dado um conjunto não vazio cujos elementos são denominados *fórmulas* de F. Ainda que a definição geral não precise se ocupar com natureza desses objetos, para os sistemas que trabalharemos isso pode feito do seguinte modo.

(a) Inicialmente, especifica-se a *linguagem* de F, que denominaremos L. Para tanto, é dado um conjunto S, em geral contável (finito ou enumerável) de símbolos, ditos *símbolos primitivos* de F. Uma seqüência finita de tais símbolos é denominada *expressão* de L. Estes símbolos formam o *alfabeto básico* de F.

(b) Seleciona-se então um subconjunto do conjunto das expressões de L, que são ditas *expressões bem formadas* ou *fórmulas* de L. Este conjunto será simbolizado por $\mathcal{F}$. O modo de se distinguir entre meras expressões e fórmulas é dado pelas regras gramaticais de L, conforme veremos abaixo.

(II) Seleciona-se um subconjunto do conjunto de fórmulas, que serão denominadas de *axiomas* de F. Em princípio, não há qualquer critério para a seleção dos axiomas; a única exigência é que sejam *fórmulas* de L. Isso será devidamente enfatizado à frente.

[1] Para maiores detalhes e referências, consultar o nosso trabalho *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*, S. Paulo, EPU 2002.

(III) É dado um conjunto finito $R_1,\ldots,R_n$ de relações entre fórmulas, ditas *regras de inferência* de F. Cada uma de tais regras R_i tem uma *aridade*, caracterizada por um único inteiro positivo n tal que, para cada conjunto de n fórmulas $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, e cada fórmula α, pode-se decidir de modo 'efetivo'[2] se a fórmula α está ou não na relação R_i com as n fórmulas dadas. Caso afirmativo, a fórmula α é dita ser *conseqüência direta*, pela regra R_i, das n fórmulas, que são ditas *premissas* da regra.

Uma forma mais precisa de caracterizar o que seja uma regra de inferência é dizer que cada R_i é um subconjunto do produto cartesiano $P(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$; se um par $\langle\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\},\alpha\}\rangle \in R_i$, caso em que α é conseqüência direta pela regra R_i das n fórmulas α_j, escrevemos

$$\frac{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}{\alpha} \qquad\qquad (R_i).$$

Mais à frente, veremos as principais propriedades relacionadas a este conceito. Como exemplos de regras de inferência 'classicas' (válidas na lógica clássica), temos o Modus Ponens (MP), o Modus Tolles (MT) e a Redução ao Absurdo (RA), dentre outras. Exemplos de inferências usando-se essas regras serão dadas abaixo na seção 1.5.

No caso das fórmulas serem dadas como acima, ou seja, sendo erigidas a partir de certos símbolos, as regras de inferência referem-se apenas à estrutura sintática dessas fórmulas, e não ao que eventualmente elas signifiquem. Esta é a principal característica da palavra 'formal' usada acima. O papel da intuição é tornado mínimo, de forma que as derivações realizadas no âmbito de um sistema F não utilizem nada além do que explicitamente é declarado na descrição de F.

Geralmente, é adequado que haja um procedimento efetivo para se saber se uma dada expressão é ou não uma fórmula. Quando há um tal processo para se saber se uma dada fórmula é ou não um axioma de F, então F é dita ser uma *teoria axiomática*.[3]

[2]Intuitivamente, um 'processo efetivo' é aquele que encerra instruções precisas, de comprimento finito, para cada passso a ser realizado; em suma, podemos pensar como sendo aqueles procedimentos que podem ser realizados por uma máquina. A definição rigorosa requer o conceito de função recursiva. Para detalhes, ver [Men87, p. 165]).

[3]Mais precisamente, uma teoria axiomática é aquela cujo conjunto de axiomas é *recursivo*, e uma teoria é axiomatizável se o conjunto de seus axiomas for *recursivamente enumerável*. Para detalhes, ver [Men87, p. 211].

O objetivo principal do estudo dos sistemas formais é o de dar um siginificado preciso à noção de *prova*, ou *demonstração*. Aqui, seguiremos o jargão usual e denominaremos o conceito a ser dado abaixo de *prova*, reservando o termo 'demonstração' para resultados metamatemáticos (essa distinção aparecerá abaixo).

O conceito formal de *prova* Uma *prova* em F é uma sequência finita $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de fórmulas (da linguagem de F)[4] tal que cada uma delas é ou um axioma de F ou é conseqüência direta, por meio de uma das regras de inferência, de fórmulas precedentes da seqüência. Um *teorema* (dito também *teorema formal*) de F é uma fórmula α para a qual existe uma prova tal que a última fórmula da sequência (de tal prova) é precisamente α.

Para facilitar, muitas vezes escreveremos uma prova dispondo as fórmulas em seqüência do seguinte modo:

1. β_1
2. β_2

$\vdots$

n. $\beta_n \ (= \alpha)$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\vdash_{\mathcal{F}} \alpha,$$

ou simplesmente $\vdash \alpha$, se não houver risco de confusão. Se F é um sistema formal no sentido acima, em geral não há um procedimento efetivo (um algoritmo) para se determinar (em um número finito de etapas) se uma dada fórmula é ou não um teorema de F. Sistemas para os quais há um tal procedimento são ditos *decidíveis*. O Sistema MAIS exemplificado a seguir é decidível, ainda que não façamos a prova deste fato aqui. Muitos sistemas importantes não têm esta propriedade, como a aritmérica e mesmo a lógica de primeira ordem. O sistema que estudaremos à frente, o chamado Cálculo Proposicional Clássico, é decidível, como veremos. Importa notar aqui que o maior uso dos sistemas formais não é exatamente a obtenção de provas (e teoremas) *dentro* de seu escopo, mas usá-los para provar fatos *acerca* de outros sistemas.

[4] Isso ficará sempre pressuposto no que se segue.

Um sistema formal é *não-trivial* quando há pelo menos uma fórmula de sua linguagem que não é um teorema, e *trivial* em caso contrário. Este conceito desempenhará papel relevante mais à frente.

1.2 O Sistema MAIS

Vamos dar um exemplo de sistema formal.[5] Chamaremos de MAIS o sistema cuja linguagem tem como símbolos primitivos unicamente $+$, $=$ e $*$. Uma fórmula é uma expressão do tipo $x+y=z$, onde x, y e z contêm somente o símbolo $*$. Por exemplo, $**+**=*****$ é uma fórmula, mas $**++==$ não é.

O único axioma de MAIS é a fórmula $*+*=**$. As regras de inferência são

$$\frac{x+y=z}{x*+y=z*}\ (R1) \quad \text{e} \quad \frac{x+y=z}{y+x=z}\ (R2).$$

É fácil ver que $***+***=******$ é um teorema de MAIS. Com efeito, temos a seguinte prova:

1.	$*+*=**$	Axioma
2.	$**+*=***$	1, R1
3.	$***+*=****$	2, R1
4.	$*+***=****$	3, R2
5.	$**+***=*****$	4, R1
6.	$***+***=******$	5, R1

Na coluna da direita, indica-se de onde e por que as derivações foram realizadas. O que importa relativamente aos sistemas formais não é unicamente o que se pode realizar no seu interior, mas em discussões *sobre* esses sistemas. Por exemplo, a respeito do sistema MAIS, podemos dizer várias coisas, como se exemplifica a seguir com o conceito de *verdade*.

Pode-se definir o seguinte conceito de *verdade* em MAIS da seguinte forma. Dizemos que uma fórmula $x+y=z$ é verdadeira se o número total de ocorrências de $*$ do lado esquerdo da igualdade é igual ao número de ocorrências deste mesmo símbolo do lado direito da igualdade. Por exemplo,

[5] Conforme [Hod95, pp. 8ss].

$**+**=****$ é verdadeira, enquanto que $**+*=*$ não é (neste caso, diremos que ela é *falsa*). Podemos então mostrar que todos os teoremas de MAIS são verdadeiros. Para tanto, usamos uma técnica bastente comum e importante, conhecida como *Indução sobre Teoremas* de um sistema formal, e que consiste basicamente no seguinte.

Indução sobre teoremas Seja F um sistema formal e P uma propriedade que se aplica às fórmulas do sistema. O que queremos é mostrar que todos os teoremas de F têm esta propriedade (por exemplo, de serem 'verdadeiros' no sentido acima, em se tratando de MAIS). Isso se faz do seguinte modo :
(1) Inicialmente provamos que todos os axiomas de $\mathcal{F}$ têm a propriedade P.
(2) Em seguida, para todas as regras de inferência de F, provamos que se as premissas das regras têm a propriedade P, então suas conclusões também a têm.

No caso exemplificado, é fácil ver que o único axioma de MAIS tem a propriedade definida de 'ser verdadeira', e que se as premissas das regras (R1) e (R2) a têm, suas conclusões também. Assim, todos os teoremas de MAIS são verdadeiros, como queríamos provar.

Exercício 1.2.1 Justifique detalhadamente a 'prova' dada acima de que todos os teoremas de MAIS são verdadeiros conforme a definição dada.

Exercício 1.2.2 *Mostre que* $*+*=**$ *é um teorema de MAIS.*

Este último exercício tem um significado interessante. Ele mostra um fato geral: todo axioma de um sistema formal é um teorema desse sistema. Isso pode parecer estranho, pois (em geral) fomos acostumados com a idéia de que os teoremas seguem-se dos axiomas por demonstração, e que axiomas não se demonstram. Isso de certo modo tem a sua razão de ser, e remonta à própria origem dos sistemas axiomáticos. Já Aristóteles dizia que "Toda ciência demonstrativa deve iniciar com princípios indemonstráveis pois, de outro modo, os passos da demonstração não teriam fim".[6] No entanto, tendo em vista a definição dada de 'prova', para obtermos uma prova de um axioma de F basta que o escrevamos, ou seja, a prova constará de uma única linha contendo o próprio axioma. Isso não contraria o dito de Aristóteles, pois o axioma não foi obtido de 'outros princípios'.

[6] Citado em [?, p. 3].

Exercício 1.2.3 Mostre que $** + *** = *****$ é um teorema de MAIS, mas que $** + * = ****$ não é.

Teorema e Metateorema, I Perceba o que está envolvido com este exercício: no primeiro caso, basta encontrar uma prova para a fórmula que é um teorema. No segundo caso, o fato de não encontrarmos uma prova não indica que ela não exista. No entanto, face ao resultado acima, podemos notar que a segunda fórmula não é verdadeira na acepção definida e que portanto não é um teorema. É claro que este mesmo procedimento poderia ser usado para a primeira fórmula, mostrando que ela é verdadeira. O resultado que afirma que "Todo teorema de MAIS é verdadeiro"é um teorema *sobre* (acerca) do sistema MAIS, mas a demonstração dada para ele não foi do tipo 'construir uma prova' tal como dito acima. Trata-se de um *metateorema* do sistema, e em sua demonstração foram utilizados recursos mais potentes que aqueles exprimíveis em MAIS. Essa distinção entre *teorema* e *metateorema* dos sistemas formais é importante e será enfatizada novamente abaixo.

Exercício 1.2.4 Construa um sistema formal MULT nos mesmos moldes que MAIS que reflita a multiplicação de números naturais não nulos de modo que, por exemplo, $** \times *** = ******$ seja teorema desse sistema. (Dica: parta do sistema MAIS e acrescente mais um símbolo à sua linguagem: $\times$. Redefina o conjunto das fórmulas; considere um axioma adicional, $*\times* = *$ e as regras adicionais (R3) $x\times y = z \,/\, x*\times y = z+y$ e (R4) $x\times y = z \,/\, y\times x = z$).

Exercício 1.2.5 [O sistema MIU] Um exemplo interessante de sistema formal foi apresentado por Douglas Hofstadter em seu livro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. O alfabeto de MIU consiste dos seguites símbolos: M, I, U. As fórmulas são ocorrências não vazias de símbolos do alfabeto. O único axioma é MI e há quatro regras de inferência: (Regra I) A qualquer fórmula terminada com I, pode-se acrescentar um U no final (ou seja, se xI é um teorema, então xIU é um teorema); (Regra II) Dada qualquer fórmula do tipo Mx, pode-se duplicar a parte após o M inicial, obtendo-se Mxx; (Regra III) Se três I ocorrem consecutivamente em uma fórmula, eles podem ser substituídos por um U; (Regra IV) Dois U consecutivos podem ser deletados de qualquer teorema. Um exemplo de um metareorema é o seguinte exercício:[7] mostre que MUIU é um teorema deste sistema, mas que MU não é.

[7]Para uma detalhes, ver [Hof80, pp. 260-1], [Cam00, pp. 57-8]. O livro de Cameron tem um site associado: `www.maths.qmw.ac.uk/ ~ pjc/slc`.

Aqui vai um resumo da solução: a primeira parte é bastante simples; quanto à segunda, basta verificar que as quatro regras de inferência 'preservam a multiplicidade por 3': a primeira e a quarta não alteram o número de I's em um teorema. Quanto à segunda e à terceira, verifica-se que ambas, uma vez iniciando-se com um número múltiplo de 3 em um teorema, este número não é alterado pela aplicação das regras (e elas não 'criam' I's, mas apenas mudam em múltiplos de 3 os já existentes). Trata-se de mais um exemplo de aplicação da indução sobre teoremas. O número de ocorrências de I's em qualquer teorema não é divisível por 3, e em particular não pode ser zero. Como corolário (na verdade, um 'meta-corolário'), segue que em qualquer teorema deve haver pelo menos um I.

Teorema e Metateorema, II A origem do nome desse sistema está ligada ao desejo de Hofstadter de ensinar a distinção entre teorema e metateorema, fazendo referência a um *koan* do Zen Budismo, o Mu de Joshu, que é o seguinte: Um monge perguntou a Joshu, um mestre Zen chinês: "Pode um cão ter a natureza de Buda?".[8] Joshu respondeu simplesmente: "Mu". Segundo Cameron, a resposta corresponde a uma negativa em chinês, mas não significa que Joshu tenha respondido "Não". Na verdade, sua resposta não é nem "Sim"e nem "Não", mas algo como "A questão errada foi formulada, ou foi formulada por por uma mente mal formada". Uma resposta "Sim"ou "Não", diz Cameron, seria uma resposta dada no sistema (formal) no qual o monge estaria operando, ao passo que Joshu está comentando *sobre* o sistema, de uma posição *externa* a ele. Assim são os metateoremas; são formulados para afirmar fatos *sobre* os sistemas formais, mas são formulados e demonstrados com recursos *externos* a eles, em geral usando-se o aparato matemático da teoria de conjuntos. Hofstadter chama a questão acima mencionada de se saber se MU é um teorema de MIU de 'o quebra-cabeças de Mu', pondo-o da seguinte forma (ibid, p. 259): "Será que MU tem a natureza de um teorema?"('Has MU theorem-nature, or not?').

[8] O poema é o seguinte, e é mencionado no contexto do estudo de proposições indecidíveis em sistemas formais:
"Has a dog Buddha-nature?
This is the most serious question at all.
If you say yes or no,
You lose your own Buddha-nature."[Hof80, p. 272].

1.3 Implica, Implica e Implica

As discussões do parágrafo anterior nos reportam a importantes distinções em lógica, em particular no que diz respeito à palavra 'implicar'. Na linguagem natural, ela é usada em diferentes contextos e com diferentes sentidos. Por exemplo, se eu não faço o meu Imposto de Renda, este fato *implicará* em sérios dissabores para mim. Interessam-nos no entanto alguns usos desta palavra em filosofia e em lógica. Por exemplo, sabemos que se todo número par é divisível por 2 e 4 é par, isso *implica* que 4 é divisível por 2. Ou seja, o fato de que 4 é divisível por 2 está implícito no fato de que todo número par é divisível por 2 e que 4 é par. Em certo sentido, não há informação nova. Diz-se que o fato de que 4 é dvisível por 2 é *consequência lógica* do fato de que todo número par é divisível por 2 e que 4 é par. Veremos isso na sequência. Outro uso é o seguinte: 'A implica B' é usado no sentido de que B é derivável logicamente a partir de A, que estamos explorando neste capítulo. As relações entre esses dois usos de 'implica' (o de consequência lógica e o de dedutibilidade lógica) serão devidamente explorados à frente. Finalmente, há ainda o 'implica' que chamaremos de 'implicação material', onde 'A implica B' significa simplesmente que A é falso ou que B é verdadeiro. Tudo isso ficará claro no que se segue, mas o leitor deve desde já ficar atento para essas importantes distinções.

1.4 Dedução a partir de um conjunto de premissas

Um conceito muito importante é o seguinte. Sejam Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que α é *conseqüência sintática* das fórmulas de Γ (ou simplesmente, conseqüência sintática de Γ), e escrevemos

$$\Gamma \vdash \alpha$$

se existe uma sequência $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de fórmulas tais que β_n é α e cada uma das demais β_j ($j = 1, \ldots, n-1$) é um axioma de $\mathcal{F}$, ou pertence a Γ ou é consequência direta, por meio de uma das regras de inferência, de fórmulas precedentes da seqüência. Uma tal seqüência é dita ser uma *dedução* de α a partir das *premissas* (ou *hipóteses*) em Γ.

Para exemplificar, na teoria (que pode ser devidamente formalizada) das matrizes, podemos obter uma prova da sentença 'A matriz A é inversível' a partir das premissas (e demais axiomas da lógica e da matemática subjacentes) 'A é quadrada' e 'o determinante de A é distinto de zero'. Ou então, da hipótese de que uma determinda função é diferenciável em um ponto, deduzimos que ela é contínua nesse ponto.[9]

Se houver necessidade de enfatizar o sistema F na qual se está efetuando as deduções, pode-se escrever

$$\Gamma \vdash_{\mathsf{F}} \alpha.$$

Se $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ é um conjunto finito, escreve-se

$$\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \alpha$$

ao invés de

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \alpha$$

Se $\Gamma = \emptyset$, escreve-se simplesmente

$$\vdash \alpha$$

ao invés de

$$\emptyset \vdash \alpha$$

e neste caso α é um teorema (formal) de F, conforme definição dada anteriormente.

Algumas das principais propriedades do operador $\vdash$ são as seguintes, aqui somente enunciadas (as provas são deixadas como exercício):

(1) [Autodedutibilidade] Para toda $\alpha \in \Gamma$, tem-se que $\Gamma \vdash \alpha$.

(2) [Monotonicidade] Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Delta \vdash \alpha$. Informalmente, se algo é dedutível a partir de um certo conjunto de premissas, continua sendo dedutível de qualquer conjunto obtido do anterior quando a ele agregamos premissas adicionais.

[9] O leitor não deve ficar preocupado com esses exemplos, que requerem alguma matemática, mas unicamente atentar para o fato de que se está inferindo certos fatos a partir de outros, dados como hipóteses ou já deduzidos anteriormente.

Raciocínios Derrotáveis A monotonicidade não se dá, no entanto, em todos os contextos; de grande importância para a ciência da computação (e para a filosofia) são as chamadas 'lógicas não monotônicas' e os raciocínios derrotáveis (*defeasible reasonings*) em geral, que ferem esse requisito.[10] É patente que este tipo de raciocínio também tem importância nas ciências empíricas e humanas. Por exemplo, em todos os contextos nos quais o acréscimo de uma informação causa o efeito de que concluções que haveriam de ser tiradas tenham que ser revistas (como no Direito, aparentemente), é não-monotônico.

(3) [Compacidade] $\Gamma \vdash \alpha$ see existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$. (Falaremos mais sobre este resultado abaixo)

(4) [Regra do Corte] Se $\Delta \vdash \alpha$ e de $\Gamma \vdash \beta$ para cada $\beta \in \Delta$, então $\Gamma \vdash \alpha$.

1.5 Regras clássicas de dedução

Nesta seção, iremos dar uma série de exemplos de regras de inferência e de deduções formais e informais visando familiarizar o leitor com as regras básicas da lógica clássica (proposicional) e como os modos usuais de se obter demonstrações. Reservaremos a palavra 'prova' para representar uma derivação em um sistema formal tal como definida acima, e a palavra 'demonstração' para denotar uma derivação informal (ou metamatemática), na qual nem todas as passagens tenham sido explicitadas. Em geral, nas derivaççoes informais, as regras lógicas como as que estaremos vendo nesta seção são deixadas implícitas, e somente aquelas passagens que fazem uso de resultados específicos da teoria que se está considerando, como a aritmética, são explicitadas. Este procedimento, adotado em geral nos textos matemáticos, mostra bem a importância de conhecermos as regras lógicas de inferência; é evidente que devemos *saber* o que está sendo omitido e sub-entendido nas demonstrações.

Tendo em vista o que vimos acima, para que esta seção seja proveitosa devemos aceitar que a lógica proposicional clássica pode ser apresentada como um sistema formal (como faremos no capítulo**??**) cujas estão entre as abaixo. Na verdade, não precisam ser *todas* as regras dadas abaixo, já que, assumindo um certo grupo delas, as demais podem ser derivadas; na nossa apresentação,

[10] Pode-se ver o No. 4, Vol. 1 (1991) da revista *Minds and Machines*, dedicado ao *defeasible reasoning*.

usaremos apenas uma dessas regras (Modus Ponens), já que procederemos *axiomaticamente*. Porém, a finalidade aqui é dupla: (1) aprender mais sobre 'provas' em sistemas formais e sobre 'provas' (ou 'demonstrações') em geral e (2) começar a praticar com as regras básicas da lógica clássica.

Nos exemplos, muitas vezes faremos uso de suposições que pertencem a outras teorias, como a aritmética, mas o leitor deve aceitar o fato de que estas partes da matemática também podem ser devidamente formalizadas (tratadas via sistemas formais).

A *lógica proposicional*, *cálculo proposicional* ou ainda *lógica sentencial* é o ramo da lógica que se ocupa das propriedades lógicas das sentenças obtidas mediante a aplicação dos *conectivos lógicos* a sentenças mais elementares (que podemos chamar de 'proposições').[11] Informalmente, uma *sentença* é uma expressão, formulada em uma linguagem adequada, que tem a propriedade fundamental de ser verdadeira ou de ser falsa, e a sua veracidade depende exclusivamente das propriedades lógicas dos conectivos lógicos e da verdade ou falsidade das sentenças mais simples que a compõem. Em particular, estaremos interessados mais à frente em uma classe particular de sentenças chamadas de *tautologias* (verdades lógicas), cuja verdade depende exlusivamente do significado dos conectivos lógicos.

No capítulo seguinte estaremos estudando com mais detalhe esta parte da lógica, mas precisamos antecipar aqui algumas informações que serão detalhadas à frente. Os conectivos lógicos que nos interessam são a *conjunção* ($\wedge$), a *disjunção* ($\vee$), a *negação* ($\neg$), o *condicional* ($\rightarrow$) e o *bi-condicional* ($\leftrightarrow$). O significado desses conectivos ficará claro no capítulo seguinte. Por ora, podemos associá-los informalmente ao "e", ao "ou"(inclusivo, como em "ou José é alto ou é moremo--podendo ser ambas as coisas), ao "se, então"e ao "se e somente se"repectivamente.

As principais regras da lógica proposicional clássica são as seguintes:

Modus Ponens (MP)

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Modus Tollens (MT)

$$\frac{\neg\beta, \alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha}$$

[11] Não compete aqui discutir se a proposição é a sentença propriamente dita ou o que ela expressa. Como nos textos de lógica em geral, omitiremos este tipo de distinção, atendo-nos às expressões das linguagens que utlizaremos.

Dupla Negação (DN)

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}\ ,\ \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Introdução do $\wedge$ (I$\wedge$)

$$\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

Eliminação do $\wedge$, ou Separação (E$\wedge$)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}, \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Tollendo Ponens (TP)

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha}{\beta}, \frac{\alpha \vee \beta,\ \neg\beta}{\alpha}$$

Introdução do $\vee$ (I$\vee$)

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}, \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

Simplificação Disjuntiva (SimDis), ou Contração

$$\frac{\alpha \vee \alpha}{\alpha}$$

Leis Comutativas (Com)

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta \wedge \alpha}, \frac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}$$

Leis Associativas (Ass)

$$\frac{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}, \frac{(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma}{\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)}, \frac{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}, \frac{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma}{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}$$

Bicondicional (Bi)

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta}, \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}, \frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

Autodedutibilidade (Au)

$$\frac{\alpha}{\alpha}$$

Leis de De Morgan (DM)

$$\frac{\alpha \vee \beta}{\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)}, \quad \frac{\alpha \wedge \beta}{\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)}, \quad \frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}, \quad \frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

Silogismo Disjuntivo (SiDis)

$$\frac{\alpha \vee \beta\,,\ \alpha \to \gamma\,,\ \beta \to \delta}{\gamma \vee \delta}$$

Contraposição (C)

$$\frac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha}, \quad \frac{\neg\alpha \to \neg\beta}{\beta \to \alpha}$$

Redução ao Absurdo (RA)

$$\frac{\neg\alpha \to \neg\beta, \neg\alpha \to \beta}{\alpha}$$

Nos exemplos e exercícios abaixo, solicitaremos que seja deduzida uma determinada proposição β a partir de certas premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Isso será algumas vezes indicado simplesmente pedindo que se mostre que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$.

Exemplo 1.5.1
(1) Deduzir R a partir das premissas P, $P \to Q$ e $Q \to R$

Solução: Consiste em exibir uma seqüência de fórmulas, cada uma das quais sendo uma premissa ou conseqüência de precedentes da seqüência por uma das regras de inferência vistas acima, de forma que a última fórmula seja a que se quer demonstrar. Neste exemplo, somente Modus Ponens é usada. A dedução pode ser a seguinte:[12]

1. P — Premissa
2. $P \to Q$ — Premissa
3. $Q \to R$ — Premissa

[12] Em geral, nos casos mais complexos, não há uma única dedução possível. A criatividade e a intuição valem bastante aqui, e a maior ou menor destreza em se obter as derivações depende quase que geralmente do treino.

4. Q — 1, 2, MP

5. R — 3, 4, MP

(2) Verifique que $P \to (Q \to R), P, \neg R \vdash \neg Q$

Solução:

1. $P \to (Q \to R)$	Premissa
2. P	Premissa
3. $\neg R$	Premissa
4. $Q \to R$	1, 2, MP
5. $\neg Q$	3, 4, MT

Exercício 1.5.1 *Nestes exercícios, além de MP e MT, lembre-se de usar DN.*
1. Provar que $P \to \neg Q, Q \vdash \neg P$
2. Idem para $\neg P \to Q, \neg Q \vdash P$
3. Idem para $\neg P, R \to P, \neg R \to S \vdash S$
4. Idem para $P \to \neg Q, Q, \neg P \to R \wedge S \vdash R \wedge S$
5. Idem para $S \to \neg R, R \vdash \neg S$
6. Demonstrar $x \neq 0$ *a partir das premissas seguintes:* $x = y \to x = z$, $x = z \to x = 1$, $x = 0 \to x \neq 1$ *e* $x = y$.
7. Demonstrar $x \neq y$ *a partir de* $x = y \to y = z$, $y = z \to y = w$, $y = w \to y = 1$ *e* $x = y$.

Exercício 1.5.2 *Nos três primeiros exercícios, use I$\wedge$ e E$\wedge$ (além das regras usadas acima); nos dois últimos, use TP:*
1. Deduza $\neg S$ *a partir de* $\neg R \wedge T$ *e* $S \to R$.
2. Mostre que $B \wedge C, B \to D \vdash B \wedge D$
3. Idem para $\neg S \to Q, \neg(T \wedge R), S \to T \wedge R \vdash \neg S \wedge Q$
4. Idem para $P \vee Q$, $\neg T$, $Q \to T \vdash P$
5. Idem para B , $B \to \neg D$, $A \vee D \vdash A \wedge B$

Prova de um condicional (PC) Um condicional $\alpha \to \beta$ usualmente é demonstrado (prova direta) do seguinte modo: assume-se α como premissa e obtém-se, de α e eventualmente de outras premissas, uma derivação de β. Isso posto, aplicamos a regra PC e dizemos que obtivemos uma derivação de $\alpha \to \beta$. Mais tarde, veremos uma justificativa para este procedimento, o chamado Teorema da Dedução.

Por exemplo, se um matemático deseja provar que, sendo x um número natural ímpar, então $x+1$ é par, ele inicia assumindo a hipótese de que x é ímpar, e mediante as leis da aritmética, mostra que $x+1$ é par.[13] Isso posto, como aceita a regra PC, ele tem condições de afirmar que obteve uma prova do condicional: "Se x é ímpar, então $x+1$ é par".

Se você acompanhou a prova informal dada na nota de rodapé, está começando a perceber porque em geral não se encontram provas formais, como foram definidas acima, nos textos de matemática. Seria extremamente laborioso exibir todos os passos das derivações, ou todos os pré-requisitos para que ela possa ser realizada. Nos *Principia Mathematica* de Whitehead e Russell, a prova de que $1+1=2$ é dada após mais de 600 páginas! Obviamente, não se pretende que seja este o procedimento a ser adotado, mas o que estamos fazendo é *entender* como funcionam as provas.

De maneira geral, o esquema da prova direta de um condicional é a seguinte: se a derivação de alguma proposição β depende, como uma das premissas, de uma proposição α, então a regra PC permite que derivemos o condicional $\alpha \to \beta$ a partir das outras premissas (se houver alguma). O esquema e:

Assumimos α como premissa.

$\vdots$

Derivamos β, usando α

Logo, $\alpha \to \beta$ por PC

Outros exemplos:

1. $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

1.	$P \to Q$	P

[13] A prova informal é a seguinte: se x é ímpar, é da forma $x = 2k+1$ para algum natural k. Portanto $x+1 = (2k+1)+1 = 2(k+1)$, ou seja, $x+1$ é um múltiplo de 2, e portanto é par.

2.	$\neg Q$	P
3.	$\neg P$	1,2, MT
4.	$\neg Q \to \neg P$	2,3,PC

Note que a premissa $\neg Q$ (passo 2) 'sumiu', sendo incorporada como antecedente de um condicional (passo 4). Consequentemente, a única premissa que restou foi $P \to Q$. Isso deve sempre ocorrer; na derivação de uma proposição, eventualmente usa-se alguma outra premissa além das dadas em princípio, o que constitui passo lícito . Mas, na conclusão final, não devem 'restar' outras que as assumidas em princípio. Todas as restantes devem ter sido 'eliminadas', como se deu acima. Vejamos outro exemplo:

2. $P \to (Q \to R) \vdash Q \to (P \to R)$

1.	$P \to (Q \to R)$	P
2.	Q	P
3.	P	P
4.	$Q \to R$	1,3,MP
5.	R	2,4,MP
6.	$P \to R$	3,5,PC
7.	$Q \to (P \to R)$	2,6,PC

Note que as linhas 2 e 3 'sumiram' como antecedentes dos condicionais em 6 e 7 respectivamente, restando ao final a única premissa dada (linha 1).

Mais um exemplo:
3. $Q \to R \vdash (\neg Q \to \neg P) \to (P \to R)$

1.	$Q \to R)$	P
2.	$\neg Q \to \neg P$	P
3.	P	P
4.	$\neg\neg P$	3,4,DN
5.	$\neg\neg Q$	2,4,MT
6.	Q	5,DN
7.	R	1,6,MP

8.	$P \to R$	3,7,PC
9.	$(\neg Q \to \neg P) \to (P \to R)$	2,8,PC

Exercício 1.5.3 *Qual a justificativa que você daria para o seguinte argumento? Pedro está ensinando a Paulo que se x é ímpar, então $x+1$ é par (como vimos há pouco). Mas Paulo retruca: "Mas, se $x = 6$, então $x+1$ não á par, pois $x+1 = 7$, que é ímpar". O que há de errado com o raciocínio de Paulo?*

Sobre o condicional O condicional "Se, então" demandará uma atenção especial nos capítulos que se seguem. Por ora, vale comentar algo a seu respeito, tendo em vista o que estamos aprendendo, ainda que as justificativas venham a ser dadas somente mais tarde. Na verdade, o que Pedro está querendo dizer a Paulo é que *se* um número natural for ímpar, *então* o seu sucessor será par, e ele está preocupado com a asserção condicional, e não com o fato particular de se saber *se* um dado número é ímpar ou não. É precisamente isso que um condicional ajuda a exprimir, como veremos nos capítulos posteriores: a única possibilidade do condicional ser falso é α ser o caso, mas β não ser, logo, sendo o condicional verdadeiro, *se* α for o caso, *então* β será o caso, e a questão de se saber se α é ou não o caso independe da lógica.

Cabe ressaltar que, para garantir a sua afirmativa, Pedro não poderia se valer de alguns casos particulares, 'mostrando' a Paulo que eles satisfazem a proposição dada, como por exemplo, raciocinando da seguinte forma: "Veja, Paulo: 5 é ímpar, e $6 = 5+1$ é par, e o mesmo ocorre com 1, com 7 ou com qualquer número ímpar que você tomar". Se Paulo tiver uma mente matemática, ele requererá de Pedro uma *demonstração* deste fato, que valha para *todos* os números naturais ímpares e, como há uma infinidade deles, de nada adiantaria Pedro ficar listando caso a caso. Ao matemático interessam *provas* (demonstrações), e por isso a nossa insistência em que você deve entender em que elas consistem. No Apêndice C, discutiremos algo sobre o papel das demonstrações.

No entanto, há que se explicar o que em matemática entende-se por um *contra-exemplo*. Suponha que Pedro fizesse a seguinte afirmativa: "Se um número natural é ímpar, então o seu sucessor é ímpar". Paulo, com sua mentalidade matemática, poderia argumentar dizendo que isso é falso, e para provar que tem razão, bastaria que exibisse um 'contra-exemplo'. "Veja, Pedro, poderia dizer ele, se tomarmos $x = 9$, que é ímpar, o seu sucessor será $x + 1 = 10$, que *não é* ímpar. Isso destrói a sua conjectura". Neste caso, *um* contra-exemplo basta. A justificativa deste fato exige que falemos em quantificadores, que estão para além do alcance destas notas. Porém, informalmente, podemos dizer que o argumento de Paulo se baseia no fato de que para provar que a afirmativa de Pedro é falsa (ela seria equivalente à seguinte: "Para qualquer número natural x, se x é ímpar, então $x + 1$ é ímpar"), bastaria mostrar que a sua negativa é verdadeira, a qual equivale a "Existe pelo menos um número natural ímpar cujo sucessor não é ímpar", e isso pode ser visto por meio do caso escolhido $x = 9$.

Exercício 1.5.4 *Mostre que a afirmativa: "Todo número par é maior do que 4" é falsa. Justifique sua resposta.*

Prova por contraposição Muitas vezes, para provar o condicional $\alpha \to \beta$, fazemos uso do fato de ele ser equivalente ao condicional $\neg\beta \to \neg\alpha$, que é dito ser sua *contrapositiva*. Deste modo, ao em vez de provar 'diretamente' $\alpha \to \beta$, obtemos uma prova (pelo procedimento anterior) de $\neg\beta \to \neg\alpha$. O esquema é:

$$\begin{array}{c}
\text{Assumimos } \neg\beta \\
\vdots \\
\text{Derivamos } \neg\alpha \\
\text{Logo, } \neg\beta \to \neg\alpha \\
\text{Portanto, } \alpha \to \beta
\end{array}$$

Exemplo 1.5.2 *Provar que se m é um natural qualquer, então se m^2 é ímpar, resulta que m é impar. A prova informal é a seguinte: Suponha que m é par* (isto é, $\neg\beta$). *Então $m^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Logo m^2 é o dobro de um natural e é portanto par (ou seja,* deduzimos $\neg\alpha$). *Portanto, se m é par, então m^2 é par. Por contraposição, vem que se m^2 é ímpar, então m é ímpar.*

Exercício 1.5.5 *Use Bi (Regra do Bicondicional) para encontrar uma prova (ainda que informal) para o fato de que se Δ é um triângulo de lados a, b e hipotenusa c, então $c^2 = a^2 + b^2$. (Dica: use a Lei dos Cossenos: sendo θ o ângulo (interno) entre os lados a e b, temos $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab\cos\theta$.*

Então, (aqui estamos obtendo uma prova da chamada 'condição necessária' $\alpha \to \beta$) se Δ é retângulo e a hipotenusa é c, tem-se que $\theta = 90^o$ e portanto $c^2 = a^2 + b^2$. Reciprocamente (agora vem a prova da condição suficiente $\beta \to \alpha$), se $c^2 = a^2 + b^2$, então $\theta = 90^o$ e o triângulo é retângulo com hipotenusa c.)

Redução ao Absurdo Uma *contradição* é uma expressão da forma $\beta \wedge \neg\beta$, onde β é uma fórmula qualquer. Uma prova por redução ao absurdo consiste em, querendo provar α, assumir $\neg\alpha$ como premissa e por seu intermédio (eventualmente juntamente com outras premissas) derivar uma contradição. Isso posto, RA permite derivar α como conclusão das demais premissas (se houver alguma). O esquema é o seguinte; para provar A, agimos assim:

Assumimos $\neg A$ como premissa.

$\vdots$

Derivamos $B \wedge \neg B$ por seu intermédio.

Portanto, A por RA.

Por exemplo, considere a seguinte derivação: $P \to Q \, , \, P \to \neg Q \vdash \neg P$

1.	$P \to Q$	Premissa
2.	$P \to \neg Q$	Premissa
3.	P	Premissa (negação da tese)
4.	Q	1,3,MP
5.	$\neg Q$	2,3,MP
6.	$Q \wedge \neg Q$	4,5, I$\wedge$
7.	$\neg P$	1,6,RA

Exercício 1.5.6 *Um exemplo clássico: provar que $\sqrt{2}$ é irracional. (Pode dar a prova informal, sabendo no entanto que se trata de algo que pode ser devidamente formalizada.)*

Validade de argumentos, I O método dedutivo exposto acima pode ser utilizado para analisarmos se um dado argumento é ou não válido. Grosso modo, um argumento é um conjunto de sentenças de uma determinada linguagem, de forma que uma delas é dita ser a *conclusão* do argumento, enquanto que as demais são as suas *premissas*. O que objetivamos é verificar se a conclusão *se seque* (é conseqüência) das premissas. O essencial é caracterizar o sentido desse 'se segue'. Se estivermos no âmbito do que podemos chamar de 'modo clássico de argumentar', é de se supor que a conclusão se siga das premissas por meio de deduções realizadas tendo em vista as regras 'clássicas' vistas acima. Assim, diremos que um argumento é *válido* se pudermos derivar a conclusão a partir das premissas do argumento, e que não é válido em caso contrário. Mais tarde, quando tivermos introduzido o conceito de *verdade*, veremos um outro critério (seção 2.5).

Tomemos então um exemplo simples. Considere o seguinte argumento.

> Se Antonio ganhar o primeiro prêmio, então Pedro ganhará o segundo. Mas Pedro não ganhará o segundo prêmio. Ou Antonio ganhará o primeiro prêmio, ou José ganhará o terceiro prêmio. Se Roberto ganhar o segundo prêmio, então José não ganhará o terceiro prêmio. Portanto, Roberto não ganhará o segundo prêmio.

Simbolizando as sentenças convenientemente, temos as seguintes premissas: $A \to P$, $\neg P$, $A \vee J$, $R \to \neg J$ e a conclusão $\neg R$. É bem fácil ver que o argumento é válido.

Exercício 1.5.7 *Sejam A, B e C ângulos de um triângulo qualquer. Verifique se o seguinte argumento é válido. Se $A = B$, então $B = 45^o$. Se $B = 45^o$, então $\gamma = 90^o$. Mas $B = 90^o$ ou $B \neq 90^o$. Portanto, $A \neq B$.*

1.6 O operador de conseqüência

Uma outra forma de caracterizar a noção de dedutibilidade, devida a Alfred Tarski e equivalente à vista, é por meio do chamado *operador de conseqüência*, denotado por Cn. O operador Cn é uma aplicação de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ em $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, ou seja, associa conjuntos de fórmulas a conjuntos de fórmulas, satisfazendo os seguintes axiomas, sendo X e Y subconjuntos de $\mathcal{F}$ (note que na definição anterior de dedutibilidade, tomamos o contradomínio como sendo simplesmente $\mathcal{F}$, que é um caso particular do aqui apresentado):

(i) $X \subseteq Cn(X) \subseteq \mathcal{F}$

(ii) Se $X \subseteq Y$, então $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$

(iii) $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$

(iv) [Axioma da Finitude] $Cn(X) \subseteq \bigcap\{Cn(Y) : Y \in Fin(X)\}$, onde $Fin(X)$ denota a coleção dos subconjuntos finitos de X.

Tendo em vista o que já conceituamos acima, podemos introduzir este operador no contexto precedente do seguinte modo. Definimos $Cn(X) =_{\mathsf{def}} \{\alpha \in F : X \vdash \alpha\}$. 'E imediato constatar que Cn tem propriedades análogas àquelas acima atribuídas ao operador $\vdash$.

1.7 O que é uma lógica?

De um ponto de vista abstrato, uma lógica $\mathcal{L}$ é um par ordenado

$$\langle \mathcal{F}, \vdash_{\mathcal{F}} \rangle,$$

onde $\mathcal{F}$ é um conjunto, dito *domínio* da lógica $\mathcal{L}$, cujos elementos são denominados de *fórmulas* e $\vdash_{\mathcal{F}}$ é uma relação sobre $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$, dita *relação de dedutibilidade*, ou *relação de consequência* (que será denotada por $\vdash$ somente). Um conjunto de fórmulas é dito ser uma *teoria*.

Os modos de se caracterizar uma lógica dependem de como se define o operador de conseqüência. Ainda que não exploremos este ponto aqui, talvez importe ao leitor saber que os modos mais comuns são o 'médodo das provas' (*proof-theoretical method*), o 'método dos modelos' (*model-theoretical method*), o 'médodo do operador de conseqüência' (*consequence operator method*) e os métodos de Gentzen' (e aqui incluímos a chamada 'dedução natural'), cada um deles comportando vários sub-métodos. O método que estamos adotando neste texto é o método das provas, também dito método ao 'estilo-Hilbert'. O método dos modelos, essencialmente devido a Tarski, usa a definição de dedutibilidade seguinte (trata-se de uma definição 'semântica', como a própria palavra 'modelo' sugere): α é dedutível de Γ se e somente se todo modelo de Γ é modelo de α. O método do operador de conseqüência introduz Cn como vimos, e os métodos de Gentzen baseiam-se na noção de *sequentes*, que não comentaremos.[14]

[14]Para uma exposição introdutória da dedução natural, ver [?]

Uma *lei lógica* é simplesmente uma condição que se dá sobre o operador de dedutibilidade. Por exemplo, as leis dadas acima para o operador Cn são leis lógicas. Mesmo em um contexto geral como este, uma vez tendo caracterizado por meio de leis lógicas o operador de dedutibilidade $\vdash$, podemos obter facilmente o operador Cn do seguinte modo: para $X \subseteq \mathcal{F}$, colocamos $X \vdash \beta$ para abreviar $\langle X, \beta \rangle \in \vdash$, e definimos $Cn(X) =_{\mathsf{def}} \{\beta \in \mathcal{F} : X \vdash \beta\}$, que tem as propriedades indicadas acima.

Como se pode perceber, o importante é, uma vez dado $\mathcal{F}$, caracterizar $\vdash$, e há vários modos de se fazer isso. As leis lógicas que impusermos caracterizarão a particular lógica com a qual estaremos operando. O estudo geral dos sistemas lógicos desta forma constitui tópico relevante e atual. Para os leitores curiosos, indicamos [CosBez94] para um apanhado geral.

Capítulo 2

O Cálculo Proposicional Clássico

APRESENTAREMOS UM sistema formal que chamaremos de Cálculo Proposicional Clássico. Os objetos estudados por meio deste cálculo são denominados de *proposições*, e o que (informalmente) importa é que, intuitivamente falando, cada uma é verdadeira ou falsa, mas não ambas as coisas. O sentido das palavras 'verdade' e 'falsidade' será esclarecido à frente. No Cálculo Proposicional, representamos as proposições de um certo modo mesmo sem nos ocuparmos com o seu significado filosófico e então nos ocuparemos de *combinar* as proposições visando obter outras proposições mais complexas por meio dos chamados *conectivos lógicos*: a negação (simbolizada por $\neg$), a conjunção ($\wedge$), a disjunção ($\vee$), o condicional ($\rightarrow$) e a equivalência ($\leftrightarrow$). Como veremos na seqüência, não é necessário tomar todos os conectivos como primitivos; escolheremos dois deles, e os demais poderão ser introduzidos por definição. Um conceito importante nesse Cálculo é que a *verdade* (ou 'valor-verdade'), que no caso de uma proposição complexa depende dos valores-verdade das proposições *atômicas* que a compõem, fato esse que é conhecido como *Princípio de Frege*. O adjetivo 'clássico' usado acima para designar o sistema em estudo refere-se à lógica *clássica*, em contraposição às lógicas não-clássicas às quais faremos referência oportunamente.

Chamaremos de $\mathcal{C}$ a teoria formal que corresponderá ao Cálculo Proposicional Clássico. A linguagem de $\mathcal{C}$ será denotada por L. Conforme o que se disse no capítulo anterior, iniciaremos descrevendo o alfabeto básico de L. Os símbolos primitivos desta linguagem são os seguintes:

(i) Conectivos primitivos: $\neg$ e $\rightarrow$

(ii) Variáveis proposicionais: $A, B, C, \ldots$

(iii) Símbolos auxiliares: (,) (parênteses)

Dar o alfabeto de L é semelhante a dizer quais símbolos deverão constar do teclado de um computador com o qual desejamos escrever (em princípio) matemática. No entanto, não basta dispormos do alfabeto; uma criança não alfabetizada com um teclado à disposição pouco fará, pelo menos em tempo hábil.[1] É preciso *aprender a escrever*, ou seja, conhecer as regras gramaticais da linguagem. No nosso caso, elas serão dadas abaixo. Antes, um esclarecimento.

Na apresentação de uma teoria formal, nada é dito acerca do significado de seus símbolos básicos (o que caracteriza a teoria como 'formal'), isso vindo posteriormente quando se associa à sua linguagem uma *interpretação*. No entanto, tendemos a raciocinar intuitivamente, carregando a simbologia com significados, como por exemplo quando afirmamos acima que $\neg$ representava a negação. Não há problema quanto a isso, desde que não nos prendamos ao significado intuitivo dos símbolos que usamos, que têm somente papel de guiar a nossa intuição. O verdadeiro significado (operacional) desses conceitos é fixado pelos axiomas que escolhermos, como se verá. No caso particular dos símbolos listados acima, como dito, geralmente lemos $\neg$ como *negação* e $\rightarrow$ como *implicação*, mas principalmente quanto a este último deveremos tomar algum cuidado. Vejamos algo sobre isto.

A palavra 'implicar', de novo. Já vimos na seção 1.3 que há importantes distinções a serem consideradas no que diz respeito à palavra 'implicar'. Na linguagem usual geralmente entendemos 'implicar' no sentido de 'acarretar'. Assim, por exemplo, não estudar o suficiente geralmente acarreta (implica) problemas com a aprovação. Apesar desta afirmativa ser em geral verdadeira, não é este o significado da implicação usada quando queremos falar agora da 'implicação material'. Por exemplo, na lógica clássica, devido ao sentido que se dá ao 'implica', devemos aceitar como verdadeira uma sentença da forma "Se $1+1=5$, então Florianópolis é Capital da Paraíba", ainda que "$1+1=5$"nada tenha a ver com Florianópolis ou com a Paraíba. O símbolo '$\rightarrow$' representará formalmente o *condicional* "Se ..., então ...", e seu caráter operacional será especificado pelos axiomas que virão, os quais procurarão

[1] Cogita-se que, com tempo suficiente, um macaco poderá (teclando a esmo) reproduzir até mesmo as obras de Shakespeare.

refletir o que na lógica tradicional (aristotélica) é conhecido como 'condicional de Filo', atribuído a Filo de Mégara, como veremos abaixo. Bertrand Russell chamou este condicional de *implicação material*. Informalmente, 'A implica B' significará que A é falso ou que B é verdadeiro. Na frase acima, como $1+1=5$ é falso, resulta que o condicional "Se $1+1=5$, então Florianópolis é Capital da Paraíba"será verdadeiro. Este uso, ainda que possa parecer estranho, é essencial em matemática, como veremos. Assim, nada há de errado em continuarmos a chamar $\alpha \to \beta$ de "α *implica* β", desde que tenhamos sempre em mente as distinções já apontadas para os vários sentidos da palavra 'implica'. Ademais, saliente-se que várias interpretações podem ser dadas para $\to$ (outras que a usaremos), como aquelas mostradas por J. Corcoran em [Cor73]. O conceito de 'implicação física' é também relevante e será visto abaixo.

Uma vez descrito o alfabeto básico de nossa linguagem, passaremos ao segundo passo na descrição de uma teoria formal, qual seja, o de 'aprender a escrever', ou seja, definir as expressões bem formadas (ou *fórmulas*) da linguagem. Lembremos que uma expressão é uma sequência finita de símbolos da linguagem. No nosso caso, exemplos de expressões são:

$$\neg\neg(((\to\to ABA((\neg$$

$$\to\to\to AAA)))\neg)\neg$$

$$(A \to (A \to \neg B))$$

A definição de *fórmula* da linguagem L é a seguinte, dada indutivamente:[2]

(i) Uma variável proposicional é uma fórmula.

(ii) Se α e β são fórmulas, então $(\neg\alpha)$ e $(\alpha \to \beta)$ são fórmulas. Nesta fórmula, α é dito ser o *antecendente*, e β o *consequente* do condicional.

(iii) Uma expressão é uma fórmula se e somente se for obtida por uma das duas cláusulas precedentes.

Exemplos de fórmulas são as seguintes expressões:

[2] Ver os detalhes no Apêndice B.

$$A, \quad B, \quad (A \to (A \to (\neg B))) \qquad \text{e}$$

$$(((\neg B) \to (\neg A)) \to (((\neg B) \to A) \to B)).$$

Linguagem e Metalinguagem Denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas de L. Note que α e β, que aparecem na definição precedente, não fazem parte de nosso alfabeto primitivo. Letras gregas minúsculas são usadas aqui como *metavariáveis* para fórmulas, ou seja, são símbolos da metalinguagem que denotam fórmulas. A distinção entre *linguagem* e *metalinguagem* é importante; você pode pensar como se estivesse aprendendo uma nova língua, como o inglês. Assim, a professora entra na sala e diz:

"–Peguem uma folha de papel e escrevam a seguinte sentença curta: *John is smart.*"

Note que há *duas* línguas envolvidas, o inglês, que estamos aprendendo (a chamada *linguagem objeto*), e o português, que usamos como *metalinguagem*, com a qual exprimimos asserções *sobre* a linguagem objeto, por exemplo que uma certa sentença é curta, como fez a professora.

No nosso caso, a línguagem objeto é L e a metalinguagem e de novo o português, suplementado com símbolos adicionais, como letras gregas e outros símbolos convenientes, como $\vdash$, $=_{\mathsf{def}}$, $\wedge$ etc.

A fim de simplificarmos a escrita, introduzimos algumas convenções e definições, como se segue. Inicialmente, adotamos uma convenção para a eliminação de parênteses: parênteses externos não serão escritos; assim, excreveremos $\neg\alpha$ al invés de $(\neg\alpha)$ e $\alpha \to \beta$ ao invés de $(\alpha \to \beta)$. Depois, adotamos a convenção de que $\neg$ se aplica à fórmula 'mais curta' imediatamente à sua direita. Deste modo, $\neg\alpha \to \beta$ abrevia $((\neg\alpha) \to \beta)$, e não $(\neg(\alpha \to \beta))$. Quando quisermos escrever essa última fórmula, os parênteses serão necessários.

Finalmente, e já adotando a convenção acima, definimos:

$$\begin{aligned}
&\alpha \wedge \beta =_{\mathsf{def}} \neg(\alpha \to \neg\beta)\\
&\alpha \vee \beta =_{\mathsf{def}} \neg\alpha \to \beta\\
&\alpha \leftrightarrow \beta =_{\mathsf{def}} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)
\end{aligned}$$

Note que tampouco $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ fazem parte do alfabeto básico de L.

Definições O símbolo $=_{\mathsf{def}}$ é um sinal metalinguístico que significa 'igual por definição'. Formas alternativas de escrita são encontradas com frequência, como $=_{\mathsf{D}}$ ou $\stackrel{\mathsf{def}}{=}$, dentre outros. Este tipo de definição é chamada de definição *nominal* ou *abreviativa*, e tem o seguinte esquema geral:

$$\text{DEFINIENDUM} =_{\mathsf{def}} \text{DEFINIENS}.$$

O definiendum contém um símbolo novo, que não faz parte da linguagem objeto, mas é usado para que a expressão do definiendum *abrevie* (daí o nome desse tipo de definição) a expressão do definiens, essa sim uma fórmula da linguagem objeto. Este tipo de definição é muito comum em matemática, por exemplo quando introduzimos o conceito de subconjunto, escrevendo $A \subseteq B$ para abreviar $\forall x(x \in A \to x \in B)$, ou $\lim_{x\to a} f(x) = l$ para abreviar $\forall\epsilon\exists\delta(0 < |x-a| < \delta \to |f(x)-l| < \epsilon)$. Há modos de de acrescentar símbolos à linguagem objeto, mas certas condições devem ser obedecidas, de modo que os novos símbolos não criem monstros em locais indesejados e possam ser eliminados se necessário. Para detalhes sobre isso, ver o Capítulo 8 do livro [**?**]. Finalmente, observamos que há várias outras formas de definição além das nominais, como as recursivas, apontadas no Apêndice B.

O segundo ítem da definição de uma teoria formal exige que explicitemos algumas fórmulas que serão os axiomas do cálculo $\mathcal{C}$. Faremos isso à frente; no momento, vejamos como se pode *interpretar* a linguagem L.

Observação sobre a Notação Os símbolos que estamos empregando (como '$\neg$' e '$\to$') não são usados por todos os autores. Na verdade, não há notação padrão em lógica. A tabela abaixo, basedada em [Kne63, p. 87] mostra bem isso ('Whit/Russ' representa a notação de Whitehead e Russell, 'Hilbert' a de Hilbert e escola):

Conceito	Whit/Russ	Hilbert	Outros
não	$\sim$	$\overline{X}$, $\rightharpoondown$	N, $\neg$
ou	$\vee$	$\vee$	A
e	$\centerdot$	$\&$	K, $\wedge$
se, então	$\supset$	$\to$	C
se e só se	$\equiv$	$\sim$, $\leftrightarrow$	E

2.1 Semântica

Seja V um conjunto qualquer de variáveis para proposições. Definimos então uma aplicação v (dita *valoração*, ou *interpretação*) de V no conjunto $\{0, 1\}$.[3] O valor $v(X)$, para $X \in V$ é dito *valor-verdade* de X. Se $V(X) = 1$, dizemos que X é *verdadeira* com respeito à valoração v, e que é *falsa* em caso contrário (ou seja, se $v(X) = 0$).

Se V' é o conjunto das fórmulas de L gerado a partir das fórmulas do conjunto V mediante a definição acima (isto é, aplicando-se os conectivos lógicos),[4] então podemos definir uma aplicação v' de V' em $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ do seguinte modo:

(1) Se $X \in V$, então $v'(X) = v(X)$

(2) Para todas α e β em V', tem-se que:

(i) $v'((\neg\alpha)) = (v'(\alpha))^*$, onde x^* denota o complemento de x na álgebra de Boole $\mathbf{2}$.

(ii) $v'((\alpha \to \beta)) = (v'(\alpha))^* \sqcup v'(\beta)$.

Pode-se provar que há uma única v que preenche as condições acima.[5] Se $v'(\alpha) = 1$, dizemos que a valoração v *satisfaz* a fórmula α, e escrevemos v sat α, e que v nsat α em caso contrário. Ainda, se Γ é um conjunto de fórmulas, então escrevemos v sat Γ se v sat α para toda α de Γ. Neste caso, dizemos que v é um *modelo* de Γ. O conceito de v nsat Γ é introduzido de modo óbvio (existe pelo menos uma fórmula α de Γ tal que v nsat α).

Tendo em vista a definição acima dos conectivos $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$, resulta que:

$$v'(\alpha \wedge \beta) = v'(\alpha) \sqcap v'(\beta)$$
$$v'(\alpha \vee \beta) = v'(\alpha) \sqcup v'(\beta)$$
$$v'(\alpha \leftrightarrow \beta) = ((v'(\alpha))^* \sqcup v'(\beta)) \sqcap (v'(\alpha) \sqcup (v'(\beta))^*)$$

---

[3] Na verdade, usamos a 'álgebra de Boole' $\mathbf{2}$; Sobre reticulados e álgebras de Boole, ver o Apêndice A. A escolha de tal álgebra caracteriza nossa lógica 'a dois valores'; poderíamos ter escolhido outro conjunto imagem (outra álgebra de Boole completa), mesmo uma contendo uma infinidade de valores.

[4] Para detalhes, ver o Apêndice B.

[5] A prova é feita fazendo-se uso do chamado Teorema da Recursão. Ver o Apêndice B.

Uma fórmula α é *consequência lógica* de um conjunto Γ de fórmulas, e escrevemos

$$\Gamma \models \alpha$$

se toda valoração (definida no conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem nas fórmulas de Γ) que satisfaz as fórmulas de Γ satisfaz α. Em outras palavras, todo modelo de Γ é modelo de α. Se $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ e $\Gamma \models \alpha$, escreveremos alternativamente

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta.$$

No caso particular de $\Gamma = \emptyset$, então $\emptyset \models \alpha$, que escrevemos simplesmente

$$\models \alpha$$

o que quer dizer que *toda* valoração satisfaz α. Neste caso, dizemos que α é uma *tautologia*. Outro caso de interesse é quando nenhuma valoração satisfaz Γ; neste caso, $\Gamma \models \alpha$ para toda α. Por exemplo, tomemos $\Gamma = \{\beta, \neg\beta\}$, que não é satisfeito por nenhuma valorãção (este resultado tem uma contraparte sintática que será vista no teorema 3.0.4). Se α não é satisfeita por nenhuma valoração, então α é uma *contradição*, como por exemplo $\beta \wedge \neg\beta$.

Escrevemos $\alpha \models \beta$ para denotar que $\{\alpha\} \models \beta$, e diremos que α *implica logicamente* β. Se $\alpha \models \beta$ e $\beta \models \alpha$, então α e β são *logicamente equivalentes*.

Exercício 2.1.1 Prove que $\neg(\alpha \wedge \beta)$ e $\neg\alpha \vee \neg\beta$ são logicamente equivalentes.

Exercício 2.1.2 Verifique se o conjuntos de fórmulas seguinte tem modelo (mais tarde veremos que isso implicará que o referido conjunto é *consistente*): $\Gamma = \{\alpha \to \neg\beta,\ \neg\beta \to \gamma,\ \gamma \vee \neg\delta \to \beta\}$.

2.2 Validade: Tabelas-Verdade

Mediante o conceito de valoração visto anteriormente, pode-se provar a existência de um procedimento efetivo (um algoritmo) para se saber, dados um conjunto $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de fórmulas e uma fórmula β, se

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$$

ou não. Em particular, tomando $\Gamma = \emptyset$, tal algoritmo servirá para que possamos determinar se uma dada fórmula é ou não uma tautologia. O método que empregaremos é o das *tabelas-verdade*. Comecemos com um exemplo, a saber, mostrar que

$$\neg A \vee B \models A \rightarrow B.$$

Para tanto, considera-se todas as possíveis valorações com domínio $\{A, B\}$ (note que A e B são variáveis proposicionais; se fossem fórmulas moleculares, o domínio deveria ser o conjunto de todas as variáveis proposicionais que ocorressem nas fórmulas envolvidas, conforme a definição vista de 'valoração'). Obviamente, há 4 funções possíveis de tal conjunto em $\{0, 1\}$, que chamaremos de v_i, $i = 1, \ldots, 4$.

As valorações podem ser dispostas numa tabela como a abaixo, cada linha representando as imagens $v_i(A)$ e $v_i(B)$ de cada valoração:

	A	B
v_1	1	1
v_2	1	0
v_3	0	1
v_4	0	0

Esta tabela pode ser ampliada de sorte a incluir as fórmulas $\neg A \vee B$ e $A \rightarrow B$. Abaixo de cada uma delas, são indicados os valores que assumem para cada uma das possíveis valorações. Tais valores são obtidos, como já se viu anteriormente, do modo seguinte (indicaremos alguns casos, chamando de v_i ($i = 1, \ldots, 4$) respectivamente as valorações descritas pelas linhas da tabela acima):

Tem-se portanto, para v_1:

$$\begin{aligned} v_1(\neg A \vee B) &= v_1(\neg A) \sqcup v_1(B) \\ &= (v_1(A))^* \sqcup v_1(B) \\ &= 1^* \sqcup 1 \\ &= 0 \sqcup 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

De modo similar, e omitindo alguns detalhes óbvios,

$$\begin{aligned} v_2(\neg A \vee B) &= v_2(A) \sqcup v_2(B) \\ &= 0 \sqcup 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

É fácil ver que obtem-se a tabela seguinte, onde as linhas de 1 a 4 denotam os valores das fórmulas correspondentes para as valorações $v_1, \ldots v_4$:

A	B	$\neg A \vee B$	$A \to B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

O que resulta é que $\neg A \vee B$ e $A \to B$ têm 'a mesma tabela', ou seja, toda valoração que satisfaz uma delas também satisfaz a outra. Em outras palavras, as fórmulas em questão são logicamente equivalentes e resulta o que se queria demonstrar.

Perceba que por definição uma fórmula tem sempre um número finito de letras proposicionais, de sorte que as tabelas-verdade (como são denominadas as tabelas como as acima) terão sempre um número finito de linhas.[6]

Se atentarmos para a definição precendente, podemos obter facilmente as tabelas-verdade (cada linha representa uma valoração diferente, ou um mundo possível):

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

[6]Por indução, é fácil mostrar que se há n variáveis proposicionais envolvidas, haverá 2^n valorações possíveis, logo, 2^n linhas na tabela-verdade.

A tabela do condicional $A \to B$ expressa bem o que foi dito acima sobre a distinção desta forma de 'implica' e a noção intuitiva de 'acarreta'. Com efeito, o *condicional material* que estamos usando capta a seguinte noção, atribuída a Filo, que segundo consta dizia que um verdadeiro condicional é aquele que não tem um antecendente verdadeiro e um conseqüente falso [Mat65, p. 203]. Assim, a sentença usada anteriormente "Se $1+1=5$, então Florianópolis é a capital da Paraíba"é verdadeira em virtude do antecedente ser falso (linha 3 da tabela).

Decidibilidade Acima vimos o conceito de sistema formal *decidível*. Por um *método de decisão* para um sistema formal F entende-se um método por meio do qual podemos decidir em um número finito de passos se uma dada fórmula é ou não um teorema de F. O chamado *problema de decisão* de F é encontrar um tal método ou provar que ele não existe. O problema reside em que é preciso definir de modo sensato o que significa ter-se um *método*, o que se faz com o auxílio da Teoria da Recursão, uma das mais importantes áreas da lógica atual, mas que não abordaremos aqui; em vez disso, suporemos que os conceitos acima são intuitivamente claros, e o que interessa enfatizar é que as tabelas-verdade fornecem um método de decisão para o Cálculo Proposicional Clássico.

Observa-se que esse resultado se assenta no fato de que mediante o uso de tabelas-verdade podemos determinar (em um número finito de passos, pois a tabela tem um número finito de linhas) se uma dada fórmula é ou não uma tautologia; basta que obtenhamos a sua tabela-verdade (ver exemplo abaixo). Se a fórmula assumir valor-verdade 1 para toda valoração (ou seja, a sua tabela-verdade só contém 1's), então ela é uma tautologia; se só contiver zeros, é uma *contradição* (e, tendo zeros e uns, é dita ser uma *contingência*). Isso posto, o que se disse é resultado de um teorema, conhecido como Teorema da Completude (para o cálculo em questão), que assevera que toda tautologia é um teorema deste cálculo (vale também a a recíproca, conhecida como Teorema da Correção). Esse teorema será comentado posteriormente. Logo, determinando as tautologias, estamos determinando os teoremas do Cálculo Proposicional.

Exercício 2.2.1 (Importante) Mostre que para toda valoração v' como definida acima para as fórmulas do cálculo $\mathcal{C}$ é tal que, para toda fórmula α, tem-se que $v'(\alpha) \neq v'(\neg\alpha)$. Este resultado será usado abaixo.

2.3 Digressão: ‘Implicação Física’

Para o contexto das ciências físicas, convém explorarmos um pouco o condicional material visto acima. Como vimos, este condicional é tal que $\alpha \to \beta$ verdadeiro se ‘$\neg\alpha \vee \beta$’ o é (ou, equivalentemente, se ‘$\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$’ é verdadeiro). No entanto, ‘$\neg\alpha \vee \beta$’ é verdadeiro em qualquer um dos seguintes casos: (1) α é verdadeiro e β é verdadeiro; (2) α é falso e β é verdadeiro, e (3) α é falso e β é falso. Examinando esses casos, verificamos que se α é falso, não importa o que β seja: o condicional $\alpha \to \beta$ será verdadeiro. Logo, somos levados a pensar que uma proposição falsa pode implicar qualquer proposição, e que qualquer proposição implica uma proposição verdadeira. Por exemplo, *Se* $1+1=5$*, então Florianópolis é a capital da Paraíba*, é verdadeira, assim como *Se* $1+1=5$*, então Florianópolis é a capital de Santa Catarina*, como também *Se a Lua é feita de queijo, então Bertrand Russell é um dos autores de ‘Principia Mathematica’*, já que em todos esses casos o antecedente do condicional é falso.

Tais situações, conhecidas como *paradoxos da implicação material* são contornadas quando se percebe que a proposição $\alpha \to \beta$ é formada *usando-se* as proposições α e β, mas não diz respeito a elas individualmente, devendo ser lida ‘como um todo’, sem que se estabeleça um *vínculo* entre elas. Em seu livro *Survey of Symbolic Logic*, de 1918, C. I. Lewis introduziu um outro tipo de implicação, dita ‘implicação estrita’, representada aqui por ’$\rightsquigarrow$’; intuitivamente, $\alpha \rightsquigarrow \beta$ significa que é *impossível* que α seja verdadeira e β seja falsa. Desse modo, expressa-se, contrariamente ao caso da implicação material, uma relação entre α e β. Os sistemas *modais* de Lewis permitem tratar de situações envolvendo os conceitos de possibilidade e necessidade, contrariamente à lógica clássica. Usando-se o símbolo $\Diamond$ para exprimir a possibilidade, então $\alpha \rightsquigarrow \beta$ denota $\neg\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta)$.

Em física, no entanto, parece ser importante um outro tipo de consideração.[7] Suponha que seja dada a seguinte proposição condicional: *Se eu jogo minha caneta do alto da Ponte Hercílio Luz às 8:00:00 h, então minha caneta chega à água às 8:00:05 h.* Simbolizando tal proposição por $\alpha \to \beta$ em sentido óbvio, a implicação material nos diz (em outras palavras) que se α é verdadeira em uma situação física s, então β o será em s. Essa maneira de entender o condicional, no entanto, não resulta conveniente para todas as situações, posto que não reflete um modo adequado de representar cer-

[7] Adaptaremos o exemplo dado por Dalla Chiara em [Dal83].

tas situações físicas. Com efeito, admita que eu tenha jogado minha caneta do alto da Ponte Hercílio Luz não às 8:00:00, mas às 9:00:00. Neste caso, ambas as proposições *Se eu jogo minha caneta do alto da Ponte Hercílio Luz às 8:00:00, então minha caneta chega à água às 8:00:05* e *Se eu jogo minha caneta do alto da Ponte Hercílio Luz às 8:00:00, então minha caneta chega à água às 7:00:00* serão verdadeiras, posto que o antecedente de cada uma é falso. Em outras palavras, apesar de serem verdadeiras as duas últimas proposições, elas não refletem a 'situação física' ocorrida, em nada contribuindo para o seu estudo. Como diz a nossa autora, "praticamente todas as leis físicas interessantes, que estão na forma condicional, não correspondem a implicações lógicas" (implicação material). No seu artigo, Dalla Chiara apresenta um estudo da 'implicação física', que segundo ela é mais adequada para os propósitos dessa disciplina.

De qualquer modo, fica aqui observado mais uma vez que o sentido da palavra 'implicação' que usamos em matemática muitas vezes sem nos dar conta, diz respeito à implicação *material*, como a denominou Bertrand Russell, não se estabelecendo qualquer tipo de 'vínculo' entre antecedente e conseqüente. Por isso, não devemos estranhar que *Se* $1 + 1 = 5$, *então Moscou fica na América* seja verdadeira. Na verdade, este tipo de exemplo nunca ocorre, exceto em textos muito introdutórios de lógica. A importância do condicional material em matemática vem do fato que ele permite que cheguemos a conclusões do tipo "Se x pertence ao conjunto vazio, então x pertence a B, qualquer que seja o conjunto B. Como nada peretence ao vazio, o antecedente do condicional é falso e conseqüentemente o condicional é verdadeiro, o que implica (aqui sim no sentido de acarretar) que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, fato este desejável em matemática (se necessário, reveja a definição de inclusão dada à página 29).

Vários lógicos tentaram superar objeções como as acima relacionadas com a implicação material. O condicional estrito de Lewis não é o único; a *implicação relevante*, que fundamenta as chamadas 'Lógicas Relevantes, objetiva estabelecer uma maneira sensata de se formalizar $\alpha \Rightarrow \beta$ (a implicação relevante é simbolizada por $\Rightarrow$) como exprimindo, caso seja verdadeiro, que α impõe (*entails*) β, no sentido de acarretar. Para uma idéia acerca de tais lógicas, veja [Cos94, pp. 152ss].

2.4 Conectivos adequados

Uma *função booleana*[8] n-ária é uma aplicação de $\{0,1\}^n$ em $\{0,1\}$ (dotado de uma estrutura de álgebra de Boole). Se α é uma fórmula cujas variáveis proposicionais ocorrem entre $A_1, \ldots, A_n$, seja v valoração tal que $v(A_i) = x_i$, $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, n$. A partir de α podemos definir uma função booleana f_α n-ária pondo

$$f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = v(\alpha)$$

Exemplo 2.4.1

Para $x_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, n$, definimos $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Seja α a fórmula $\neg A$. Então pomos $f_\alpha : \{0,1\} \to \{0,1\}$ como $f_\alpha(x_i) = v(\alpha) = v(\neg A) = (v(A))^*$ (na álgebra de Boole). Em palavras, f_α 'troca' o valor-verdade que v assinala a A.

Seja α a fórmula $\beta \to \gamma$. Definimos $f_\alpha : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ pondo $f_\alpha(x_1, x_2) = (I_1^2(x_1, x_2))^* \sqcup I_2^2(x_1, x_2)$.

Neste último caso, note que se x_1 e x_2 denotam os valores-verdade de β e γ respectivamente, então a tabela abaixo (de f_α) reproduz fielmente a de $\beta \to \gamma$:

x_1	x_2	$(I_1^2(x_1, x_2))^* \sqcup I_2^2(x_1, x_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exercício 2.4.1 Usando as definições conhecidas de $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ a partir de $\neg$ e $\to$, obter funções boolenas que representem as tabelas de $\beta \wedge \gamma$, $\beta \vee \gamma$ e $\beta \leftrightarrow \gamma$.

Nota-se por outro lado que dar uma função booleana n-ária é nada mais do que dar uma tabela-verdade com n linhas. Por exemplo, a tabela seguinte define uma função booleana ternária:

[8] Ver [End72, pp. 45ss].

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

O problema interessante é estabelecer o inverso: dada uma tal tabela, achar uma fórmula que tenha tal tabela como tabela-verdade. Essa questão foi resolvida por E. Post em 1921, e será visto abaixo.

2.4.1 O Teorema de Post

Vimos acima que era pertinente indagar, dada uma tabela-verdade, ou seja, dada uma função booleana, se é possível encontrar uma fórmula que tenha tal tabela como tabela-verdade. O teorema seguinte soluciona essa questão.

Metateorema 1 (Teorema de Post) *Seja f uma função booleana. Então existe uma fórmula α tal que $f = f_\alpha$.*

Demonstração: Se $Img(f) = \{0\}$, basta tomar α como sendo qualquer contradição, por exemplo, $\neg A \wedge A$. Se $Img(f) \neq \{0\}$, admita que f seja n-ária. Para cada $1 \leq i \leq 2^n$, seja l_i a conjunção $U_1^i \wedge \ldots \wedge U_n^i$, onde U_j^i é A_j se na i-ésima linha da tabela de f a variável x_j assume valor-verdade 1, e U_j^i é $\neg A_j$ em caso contrário. Por exemplo, para a função f da tabela precedente (ver parte final da Nota 2), temos:

L_1 é $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$

L_2 é $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3$

L_3 é $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$

L_4 é $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$

L_5 é $\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$

L_6 é $\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3$

L_7 é $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$

L_8 é $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$

Considere agora α como sendo a disjunção de todas as L_j que correspondem a linhas nas quais f assume valor 1. No caso, α é $L_2 \vee L_3 \vee L_5 \vee L_6 \vee L_8$. O que se afirma é que α é precisamente a fórmula que tem a tabela-verdade descrita por f. Com efeito, definida uma valoração v, ou seja, dada uma atribuição de valores-verdade para $A_i, i = 1, \ldots, n$, digamos que v corresponda à linha j da tabela. Então $v(L_j) = 1$, mas $v(L_i) \neq 1$ para todo $i \neq j$. Se f assume valor 1 na linha j, então L_j é uma das disjunções de α, logo $v(\alpha) = 1$ em tal caso. Por outro lado, se f assume valor 0 na linha j, então L_j não é uma das disjunções de α, e então todas as L_k que compõem α assumem o valor-verdade o para tal atribuição, logo $v(\alpha) = 0$. Portanto, α 'gera' a tabela de f. $\square$

Corolário importante é que α contém somente os conecticos lógicos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Tendo em vista a possibilidade de se definir os conectivos a partir de outros, resulta imeditato o seguinte resultado:

Corolário 2.4.1 *A qualquer função booleana corresponde uma fórmula cujos únicos conectivos são $\neg$ e $\wedge$, ou então somente $\neg$ e $\vee$ ou então somente $\neg$ e $\rightarrow$.*

Os conjuntos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ e $\{\neg, \rightarrow\}$ dizem-se *conjuntos adequados* de conectivos para o Cálculo Proposicional. Intuitivamente, a partir de qualquer desses conjuntos podemos obter todos os demais conectivos.

Exercício 2.4.2 Justifique esta última alfirmativa. Mostre porque $\{\neg, \leftrightarrow\}$ não é um conjunto adequado de conectivos. Idem para $\{\neg\}$ (veja explicação a seguir).

Mais formalmente, o que acontece é o seguinte (vamos exemplificar tomando $\{\neg, \wedge\}$ como conjunto básico). Chamando de 2 ao conjunto $\{0, 1\}$, a função booleana $*$ é obviamente uma função de 2 em 2, como já se viu, ao passo que $\sqcap$ é uma função de 2^2 em 2. A definição de $\alpha \vee \beta$ a partir de $\neg$ e $\wedge$ usará essas duas funções $*$ e $\sqcap$, como é se de esperar. A partir delas, definimos a função $\sqcup : 2^2 \rightarrow 2$ pondo $\sqcup =_{def} * \circ \sqcap \circ *^c$, onde $\circ$ denota a usual composição de funções e $*^c$ é a extensão canônica de $*$ ao conjunto 2×2.[9]

Assim, a partir de um elemento genérico $(x, y) \in 2 \times 2$ (do domínio de $\sqcup$), obtemos $\sqcup(x, y) = *(\sqcap(*^c(x, y))) = *(\sqcap(*(x), *(y)))$. A função $\sqcup$ tem precisamente a tabela de $A \vee B$, como se pode mostrar facilmente (exercício).[10]

[9] Ver [Bou68, Cap. II, § 3, No. 9]. Ou seja, $*^c(x, y) = (*(x), *(y))$

[10] Por exempo, $\sqcup(1, 1) = * \circ \sqcap \circ *^c(1, 1) = * \circ \sqcap(0, 0) = *(0) = 1$.

De modo semelhante, definem-se funções adequadas para expressar $A \to B$ e para $A \leftrightarrow B$ e, daí, estendem-se tais funções para fórmulas mais gerais $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ e para $\alpha \leftrightarrow \beta$. Para completar o exercício, podemos fazer o mesmo partindo de outro conjunto básico, escolhido dentre os adequados. No entanto, resultado importante é constatar que a partir de $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *não se pode* obter os demais conectivos; em outras palavras, tal conjunto *não é* adequado. A prova deste fato advém de que não se consegue definir funções booleanas adequadas para espelhar os demais conectivos a partir daquelas que caracterizam os conectivos $\neg$ e $\leftrightarrow$. Com efeito, as únicas funções-verdade que se pode obter a partir desses dois conectivos são as dadas pela tabela abaixo, e se aplicarmos $\neg$ a qualquer delas ou $\leftrightarrow$ a quaisquer duas delas, resultará em uma das funções da tabela, como é fácil ver.[11]

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \leftrightarrow A$	$A \leftrightarrow \neg A$	$A \leftrightarrow B$	$A \leftrightarrow \neg B$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0

Analogamente, $\{\neg\}$ não é adequado pois as únicas funções de uma variável definíveis a partir desse conjunto são a função identidade e a própria negação, ao passo que uma função que assuma sempre valor 1 não pode ser definida.

2.4.2 Conectivos de Sheffer

Caberia perguntar de não há conjunto contendo um só conectivo que seja adequado para expressar todas as funções booleanas. A resposta é afirmativa; tais conectivos são conhecidos como 'barras de Sheffer', simbolizados por $\downarrow$ e $|$. O primeiro deles, que pode ser denominado *negação conjunta*[12], é definido pela tabela seguinte:

[11] Outra demonstração deste fato pode ser vista em [Men77, p. 31].
[12] 'Joint denial', cf. [Men87, p. 24].

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

É fácil ver que $\neg A \leftrightarrow (A \downarrow A)$, e que $A \wedge B \leftrightarrow ((A \downarrow B) \downarrow (B \downarrow B))$. Isso posto, a adequação de $\{\downarrow\}$ segue do que foi exposto acima. Este conectivo pode ser definido a partir dos nossos conhecidos do seguinte modo:

$$A \downarrow B =_{\mathsf{def}} \neg(A \wedge B),$$

o que mostra porque $A \downarrow B$ é verdadeiro se e somente se nem A e nem B são verdadeiros (é o 'oposto' de $\wedge$). Uma frase típica que poderia ser traduzida com o auxílio desse conectivo é "Não ambos, João e Carlos, podem ocupar a vaga na direção da revista". Claro está que a única situação em que ela poderá ser falsa será no caso dos dois ocuparem o cargo.

O outro conectivo, dito *negação alternativa*,[13] é o 'oposto' do $\vee$, e expressa o usual "nem A e nem B"como em "Nem Antonio e nem Carlos ocuparão a direção da revista". Então, temos:

A	B	$A\|B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Analogamente, este conectivo pode ser definido assim:

$$A|B =_{\mathsf{def}} \neg(A \vee B)).$$

Constata-se facilmente que são tautologias: $\neg A \leftrightarrow (A|A)$, e que $A \vee B \leftrightarrow ((A|B)|(B|B))$, de sorte que a adequação de $\{|\}$ fica também estabelecida.

O resultado seguinte mostra que $\downarrow$ e $|$ são os únicos conectivos que, sozinhos, são adequados:

Metateorema 2 *Os únicos conectivos que, sozinhos, são adequados para se obter todas as funções booleanas são $\downarrow$ e $|$.*

[13] [Men87, Loc. cit.]

Demonstração: Assuma que $A \odot B$ é um conectivo adequado. Se $v(A \odot B) = 1$ para alguma valoração v, então a partir de $\odot$ não poderíamos obter $\neg A$, pois se $v(A) = 1$, então nunca obteríamos um modo de definir $\neg$ a partir de $\odot$ de sorte que $v(\neg A) = 0$. Assim, necessariamente $v(A \odot B) = 0$ se $v(A) = v(B) = 1$. Analogamente, concluímos que deve ser $v(A \odot B) = 1$ se $v(A) = v(B) = 0$. Ficamos então som a seguinte tabela:

A	B	$A \odot B$
1	1	0
1	0	a
0	1	b
0	0	1

Resta saber o que devem ser a e b. Se a e b são $0, 0$ ou $1, 1$, então $\odot$ seria $\downarrow$ ou $|$ respectivamente. Se são $0, 1$ ou $1, 0$, então $A \odot B \leftrightarrow \neg B$ ou $A \odot B \leftrightarrow \neg A$ respectivamente são tautologias, e em ambos os casos $\odot$ seria definível em termos de $\neg$ somente. Mas já vimos que $\{\neg\}$ não é adequado, o que completa a demonstração. $\square$

2.5 Tabela de tautologias

Útil é a seguinte tabela de tautologias:

(1) Lei da Identidade: $\alpha \to \alpha$ (ou $\alpha \leftrightarrow \alpha$)

(2) Lei do Terceiro Excluído: $\alpha \vee \neg\alpha$

(3) Lei da Contradição (ou da Não-Contradição): $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

(4) Lei da Dupla Negação: $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$

(5) Lei de Peirce: $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ (ou, equivalentemente, $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$)

(6) Comutatividade de Disjunção: $\alpha \vee \beta \leftrightarrow \beta \vee \alpha$

(7) Comutatividade da Conjunção: $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$

(8) Associatividade da Disjunção: $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$

(9) Associatividade da Conjunção: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$

(10) Lei da Contraposição: $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

(11) Leis de De Morgan: $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$, $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$

(12) Leis Distributivas: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$.

(13) Lei do Destacamento (Modus Ponens): $\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

(14) Modus Tollens: $\neg\beta \wedge (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha$

(15) Tollendo Ponens: $(\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$

(16) Silogismo Hipotético: $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

(17) Silogismo Disjuntivo: $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma) \wedge (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow (\gamma \vee \delta)$

(18) Paradoxos da Implicação Material: $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta) \vee (\beta \rightarrow \alpha)$

(19) Regra de Duns Scotus: $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$

(20) Forma Implicacional da Lei de Duns Scottus: $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$

(21) Lei da Comutação ou de Permutação de Premissas: $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(22) Redução ao Absurdo (qualquer proposiç ao implica ela mesma; logo, se a negação de uma proposição também a implica, ela é sempre verdadeira): $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$

(23) Lei da Simplificação (quqlquer proposição implica uma proposição verdadeira): $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Validade de argumentos, II Na página 21, dissemos que veríamos um outro modo para verificar se um dado argumento é ou não válido. Com o uso das tabelas de verdade e dos conceitos semânticos vistos acima, é bem fácil ver como isso pode ser feito. Um argumento é válido se a conclusão for verdadeira sempre que as premissas o forem. Em outras palavras, *se* as premissas forem verdadeiras, a conclusão o será necessariamente. Por 'premissas serem verdadeiras' obviamente queremos dizer que *todas elas o são*, ou seja, a sua conjunção é verdadeira. Assim, sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ as premissas de um argumento e β a sua conclusão, então ele será válido se e somente se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \rightarrow \beta$ for uma tautologia. Por exemplo, mostre usando este procedimento que o argumento visto na página 21 é válido.

Capítulo 3

Axiomatização do Cálculo Proposicional

NESTA SEÇÃO erigiremos uma teoria formal para o Cálculo Proposicional Clássico, a qual chamaremos de $\mathcal{C}$. Anteriormente, já apresentamos a linguagem L de $\mathcal{C}$, que contém os conectivos lógicos $\neg$ e $\rightarrow$, além de variáveis para proposições $A, B, \ldots$ e parênteses. Também vimos como selecionar, dentre o conjunto das expressões da linguagem (seqüências finitas de símbolos), as *fórmulas* de L. Desse modo, preenchemos dois dos quesitos para se erigir uma teoria formal, como visto. Resta portanto explicitar os axiomas e as regras de inferência de $\mathcal{C}$, o que faremos no que se segue.

Axiomas de $\mathcal{C}$

Sendo α, β e γ fórmulas quaisquer de L, então:

(A1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(A2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(A3) $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$

A única regra de inferência é Modus (Ponendo) Ponens, abreviadamente MP, também dita *Regra do Destacamento*:

(MP) De α e de $\alpha \rightarrow \beta$, inferimos β. Como é usual, representamos este fato escrevendo:

$$\frac{\alpha,\ \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Este sistema é apresentado em Mendelson 1997. Como já se viu anteriormente, as regras de inferência (ou de derivação) dizem de que modo podemos *derivar* (ou *demonstrar*) certas proposições a partir de premissas assumidas ou de outras proposições já demonstradas, tratando-se de algo diverso de uma fórmula, como uma tautologia por exemplo. Assim, Modus Ponens (a regra) difere da tautologia de mesmo nome listada acima. Como vimos no capítulo precedente, uma *regra* (de inferência) pode ser vista como um par ordenado cujo primeiro elemento é um conjunto de fórmulas (as premissas da regra), enquanto que o segundo elemento é uma fórmula, a *conclusão* da regra. As regras são fundamentais para a noção de derivabilidade, já introduzida antes.

Na regra MP acima, assim como nos axiomas, empregamos *variáveis sintáticas* (*metavariáveis*) para fórmulas: α, β, ... Note que tais letras gregas não fazem parte do vocabuário básico de L. O uso de variáveis sintáticas na formulação de (A1)–(A3) acima faz com que tais espressões constituam na verdade *esquemas* de axiomas, ou seja, tais expressões são 'formatos' de fórmulas (os 'verdadeiros' axiomas), já que as letras gregas *representam* fórmulas de L (obtidas empregando-se os símbolos do vocabulário básico). Por exemplo, é axioma de $\mathcal{C}$ a seguinte fórmula, que é uma 'instância' de (A1):

$$(A \to B) \to ((C \vee \neg D) \to (A \to B))$$

Do mesmo modo, para α e β fórmulas quaiquer, são axiomas de $\mathcal{C}$ as fórmulas seguintes, que são também instâncias de (A1):

$$\beta \to (\beta \to \beta)$$

$$\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$$

Se tivéssemos empregado símbolos básicos de L na formulação dos axiomas, por exemplo escrevendo $A \to (B \to A)$ para (A1), e fazendo coisa análoga com os demais axiomas, teríamos que introduzir uma outra regra de inferência, dita *Regra de Substituição* (ou da *Extensionalidade*), a qual assevera que 'se em uma proposição válida algumas ocorrências de uma dada variável proposicional forem substituídas por uma mesma fórmula, o que se obtém é ainda uma proposição válida'. Contextos nos quais uma tal regra é válida são denominados de *truth-functional* (ou 'extensionais'). Na linguagem natural, é fácil dar exemplo de contextos que não são estensionais nesta acepção. Por exemplo, considere uma proposição da forma "Os medievais acreditavam que a Terra é plana", que é verdadeira (feitas algumas restrições óbvias); substitua agora a proposição 'a Terra é plana' por 'o poder de Deus não está acima do poder dos homens', que para eles era falsa (restrições idem). Exemplos de lógicas que não são extensionais são as Lógicas Modais, que formalizam operadores como 'necessário', 'possível', assim como as lógicas que envolvem contextos de crença.

Os conceitos de *teorema*, de *conseqüência de um conjunto de premissas* etc. aplicam-se aqui da mesma forma como introduzidos anteriormente. Vejamos alguns exemplos mas, antes, façamos uma distinção fundamental entre teorema *do* Cálculo Proposicional e de teorema *sobre* o Cálculo Proposicional, ou seja, *metateoremas*. O contexto deixa clara a diferença entre eles, mas é interessante que percebamos a sua disteinção.

Teorema 3.0.1 $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

Prova:

1. $\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ (A1)
2. $(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ (A2)
3. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ 1, 2, MP
4. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ (A1)
5. $\alpha \rightarrow \alpha$ 3, 4, MP

Observe que o símbolo $\vdash$ usado no enunciado do teorema está indicando que $\alpha \rightarrow \alpha$ é um teorema (formal) de $\mathcal{C}$, ou seja, pode ser derivado a partir dos axiomas deste cálculo somente, sem o uso e quaisquer premissas. Ademais, note que cada uma das fórmulas acima é um axioma ou é conseqüência de fórmulas precedentes da seqüência por Modus Ponens, exatamente de acordo com a definição do que é uma *prova*, dada anteriormente.

Um teorema já demonstrado, como o acima, pode ser usado em uma outra prova, e sua inserção em uma das linhas de tal prova simplesmente significa que se está substituindo toda uma derivação já feita anteriormente. Por exemplo,

Teorema 3.0.2 $\vdash (\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Prova:

1. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (A3)
2. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ Teo. 3.0.1
3. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ 1, 2, MP

Assim, na segunda linha, a introdução de $\neg\alpha \to \neg\alpha$ evita que se precise acrescentar outras 5 linhas à prova (conforme Teorema 3.0.1).

Vejamos agora alguns exemplos de derivações a partir de conjuntos de premissas.

Teorema 3.0.3 $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash \alpha \to \gamma$

Prova:

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ Premissa
2. β Premissa
3. $(\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (A2)
4. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ 1, 2, MP
5. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ (A1)
6. $\alpha \to \beta$ 2, 5, MP
7. $\alpha \to \gamma$ 4, 6, MP

Na verdade, chamar o resultado precedente de 'teorema' é contrariar a definição de *teorema* dada anteriormente. No entanto, seguiremos a prática matemática usual de considerar como teoremas de uma teoria também aquelas proposições que são derivadas em seu escopo a partir de premissas.

Exercício 3.0.1 Mostre o seguinte: (Pode usar os teoremas já provados)

(1) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

(2) $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$

(3) $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$

Faremos agora uma constatação que é típica não só da lógica clássica, mas da maioria dos sistemas, como a lógica intuicionista ou as lógicas polivalentes. Esse resultado pode ser assim enunciado: "De uma contradição, tudo se segue" (*ex falso sequitur quodtlibed*). A importância desse resultado será comentada à frente.

Teorema 3.0.4 $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

Prova:

1. α	Premissa
2. $\neg\alpha$	Premissa
3. $\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$	(A1)
4. $\neg\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	(A1)
5. $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	2, 4, MP
6. $\neg\beta \rightarrow \alpha$	1, 3, MP
7. $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$	(A3)
8. $(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$	5, 7, MP
9. β	6, 8, MP

Em outras palavras, se tivéssemos obtido α e $\neg\alpha$ de algum modo, poderíamos então derivar β, qualquer que seja β. Voltaremos a este ponto abaixo (ver a seção 56).

No momento, observe que o teorema acima está formulado na metalinguagem de $\mathcal{C}$. Em palavras, diz que *Se* tivermos α e $\neg\alpha$, *então* podemos derivar β. Com o auxílio do Teorema da Dedução, que veremos à frente, podemos derivar como teorema de $\mathcal{C}$ a fórmula $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ ou, equivalentemente, $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$, que reflete o que se disse *no interior* do nosso cálculo.[1]

3.1 O Teorema da Dedução

O resultado seguinte, denominado Teorema da Dedução (na realidade, um *metateorema* acerca do cálculo $\mathcal{C}$), justifica a prática matemática usual de se obter uma prova de $\alpha \rightarrow \beta$ assumindo-se o antecedente α como hipótese e, com o seu auxíio, derivando β.

Metateorema 3 (Teorema da Dedução) *Sejam Γ um conjunto de fórmulas, α e β fórmulas quaisquer. Então, se $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, tem-se que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.*

[1] A derivação desse resultado pode ser feita sem o auxílio do Teorema de Dedução.

Demonstração: Vamos chamar de (*) a constatação seguinte: o axioma (A1) e a regra Modus Ponens implicam que se podemos deduzir β a partir de α e de qualquer conjunto de hipóteses (como Γ), então podemos deduzir $\alpha \rightarrow \beta$ a partir desse conjunto de hipóteses. Agora, vamos admitir que haja uma derivação de β a partir de Γ, α, e procederemos por indução sobre o comprimento desta derivação, ou seja, sobre o número de fórmulas que aparece na seqüência. Se há somente uma fórmula na prova, então esta linha terá que ser β. Mas β é um axioma, um elemento de Γ ou é α. Nos dois primeiros casos, a hipótese α não é usada, assim podemos nos valer da observação (*) acima, que se aplica. Se por outro lado β é α, então, como já provamos que $\beta \rightarrow \beta$, teremos o que desejamos. Se a prova tem mais de uma fórmula, assuma que o resultado do teorema vale para provas mais curtas (hipótese de indução).[2] Se β é um axioma ou um elemento de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, então a dedução de β poderia ser obtida em um único passo, caso que já comentamos. Assim, suponhamos que β é deduzida de γ e de $\gamma \rightarrow \alpha$ por MP, e que essas duas fórmulas ocorrem em etapas anteriores da seqüência, sendo portanto derivadas em etapas mais curtas que β. Assim, pela hipótese de indição, ambas $\alpha \rightarrow \gamma$ e $\alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$ podem ser derivadas de Γ. Agoras usamos (A2) e MP duas vezes. $\square$.

Exercício 3.1.1 Complete os detalhes da demonstração do teorema da dedução.

Exercício 3.1.2 Mostre usando o teorema da dedução que $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))$ é um teorema deduzindo $\alpha \rightarrow \beta$ do conjunto $\Gamma = \{\neg\alpha\}$ e aplicando o teorema.

O Teorema da Dedução (TD) facilita em muito algumas provas em $\mathcal{C}$. Observa-se que ele não é algo como que uma 'regra de inferência', que permita fazer deduções, mas tão somente algo que permite 'economizar' em deduções no seguinte sentido: se podemos obter uma prova de β a partir de Γ e de α, então há uma prova de $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de Γ. É isso que ele nos diz, sem que tenhamos necessariamente que obter esta última derivação. Vejamos alguns exemplos, iniciando com um resultado já obtidodo anteriormente (página 48) sem o TD. Usaremos a denominação 'Hipótese do TD' para enfatizar o que será assumido como hipótese conforme enunciado do TD.

[2] Esta é a chamada 'segunda forma' do Princípio da Indução, ou Princípio de Indução Completa; para provarmos que uma proposição P é verdadeira para todos os naturais n, mostramos que o fato de P ser verdadeira para todos naturais m tais que $m < n$ implica que ela é verdadeira para n.

Teorema 3.1.1 $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash \alpha \to \gamma$

Prova:

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$	Premissa
2. β	Premissa
3. α	Hipótese do TD
4. $\beta \to \gamma$	1, 3, MP
5. γ	2, 4, MP
6. $\alpha \to \gamma$	1–5, TD

Repare que 1–5 nos deu $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha \vdash \gamma$. A aplicação do TD levou-nos então a $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$.

3.2 Correção e Completude

Daremos agora alguns resultados metamatemáticos importantes acerca do cálculo $\mathcal{C}$.

Metateorema 4 (Correção) *Todo teorema de $\mathcal{C}$ é uma tautologia. Ou seja, se $\vdash \alpha$, então $\models \alpha$.*

Demonstração: A demonstração é feita por 'indução sobre teoremas', técnica já explicada acima. Reromando a idéia básica, isso consiste no seguinte: para provarmos que todos os teoremas de um sistema formal têm uma certa propriedade (no caso, ser uma tautologia), incialmente provamos que os axiomas têm esta propriedade, e depois que se as premissas de uma regra de inferência têm a propriedade, a sua conclusão também a tem. No presente cao, portanto, basta verificar que os axiomas (A1)-(A3) são tautologias e constatar que se α e $\alpha \to \beta$ são tautologias, então β é uma tautologia (ou seja, a regra de inferência Modus Ponens leva de tautologias a tautologias). O primeiro ponto fica proposto como exercício; quanto ao segundo, note que se α e se $\alpha \to \beta$ são tautologias, então não pode ser o caso de que β não seja tautologia, pois se para alguma valoração v tivéssemos que $v(\alpha) = v(\alpha \to \beta) = 1$ mas $v(\beta) = 0$ então, como $v(\alpha) = 1$, teríamos que $v(\alpha \to \beta)$ deveria ser 0, contrariando a hipótese de que é uma tautologia. Assim, $v(\beta) = 1$ para toda valoração v. $\square$

Exercício 3.2.1 Provar que os axiomas (A1)–(A3) são tautologias.

Corolário 3.2.1 *Sendo Γ um conjunto qualquer de fórmulas, então se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \models \alpha$.*

Outro teorema importante é o Teorema da Compacidade. Para demonstrá-lo, vamos considerar alguns Lemas, usando notação óbvia.

Lema 3.2.1 *$\Gamma \models \beta$ se e somente se $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ não tem modelo.*

Demonstração: Suponha que $\Gamma \models \beta$ e, por absurdo, que haja uma valoração v' que seja modelo para $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$. Então, $v'(\Gamma) = 1$ e $v'(\neg\beta) = 1$. Mas como $\Gamma \models \beta$, devemos ter $v'(\beta) = 1$, o que contraria o resultado mostrado no exercício (2.2.1). Reciprocamente, assuma que $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ não tem modelo. Seja v' valoração que seja modelo de Γ. Objetivamos mostrar que $v'(\beta) = 1$. Como $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ não tem modelo, v' não pode ser modelo para este conjunto de fórmulas, logo, como no entanto é modelo sw Γ, segue-se que $v'(\neg\beta) = 0$, e do exercício (2.2.1) vem que $v'(\beta) = 1$, como queríamos provar. □

Um outro resultado importante, também conhecido como Teorema da Compacidade, será usado abaixo porém aqui somente enunciado. Diz ele o seguinte:

Metateorema 5 (Compacidade, I) *Se todo subconjunto finito de Γ tem modelo (ou seja, existe uma valoração v tal que $v(\alpha) = 1$ para toda fórmula $\alpha \in X$ com $X \subseteq \Gamma$ finito), então Γ tem modelo.*

Metateorema 6 (Compacidade, II) *Se $\Gamma \models \beta$, existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \models \beta$.*

Demonstração: Assuma que $\Gamma \models \beta$. Então pelo Lema acima $\Gamma \cup \{\neg\beta\}$ não tem modelo. Pelo Teorema da Compacidade I, há um subconjunto finito $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\beta\}$ que não tem modelo. Seja $\Delta =_{\mathsf{d}ef} \{\alpha : \alpha \in \Gamma \wedge \alpha \in \Delta'\}$. Então Δ é um subconjunto finito de Γ e $\Delta \cup \{\neg\beta\}$ não tem modelo. Segue-se portanto do Lema acima que $\Delta \models \beta$, como queríamos semonstrar. □

Lema 3.2.2 *Sejam $\beta_1, \ldots, \beta_n$ as variáveis proposicionais que ocorrem em uma certa fórmula α. Dada uma valoração v, definamos B_i' como sendo B_i $(i = 1, \ldots, n)$ se $v(B_i) = 1$ e B_i' é $\neg B_i$ em caso contrário. Definamos ainda α' como sendo α se $v(\alpha) = 1$ e α' é $\neg\alpha$ em caso contrário. Então $\beta_1', \ldots, \beta_n' \vdash \alpha'$.*

Este Lema auxilia a prova do seguinte importante teorema:

Metateorema 7 (Completude) *Toda tautologia é um teorema de $\mathcal{C}$, ou seja, se $\models \alpha$, então $\vdash \alpha$.*

O método de prova do teorema acima é *efetivo*; intuitivamente, isso significa que ele pode proporcionar um modo de se definir um algoritmo para se obter uma prova de uma tautologia qualquer.

Exercício 3.2.2 Usando o método da prova precedente, achar uma prova para a tautologia $\beta \to (\beta \vee \gamma)$.

Corolário 3.2.2 *Se $\Gamma \models \alpha$, então $\Gamma \vdash \alpha$.*

Importante conseqüência do teorema acima é a prova da *consistência* do nosso cálculo $\mathcal{C}$. Lembremos que uma teoria formal T cuja linguagem contenha um símbolo de negação $\neg$ é *consistente* se não houver fórmula α tal que α e $\neg\alpha$ sejam ambas teoremas de T. Em outras palavras, tem-se, para cada fórmula α, que $T \nvdash \alpha$ ou T $\nvdash \neg\alpha$. Caso isso não ocorra, T é dita ser *inconsistente*. Temos então:

Corolário 3.2.3 (Consistência) *O cálculo $\mathcal{C}$ é consistente.*

Demonstração: Pelo teorema da correção, todo teorema é uma tautologia. Como a negação de uma tautologia não pode ser uma tautologia, é impossível que haja uma α tal que ambas, α e $\neg\alpha$ sejam teoremas de $\mathcal{C}$. □

Corolário 3.2.4 *Há fórmulas de $\mathcal{C}$ que não são teoremas deste cálculo.*

Exercício 3.2.3 Mostre que $\alpha \vee \beta$ não é teorema de $\mathcal{C}$. (Basta mostrar que não é uma tautologia)

3.3 Outras axiomatizações

Pode-se apresentar outras axiomáticas para o Cálculo Proposicional Clássico, equivalentes àquela vista acima (no sentido de que seus axiomas dão a mesma classe de teoremas). Na verdade, foram apresentadas várias delas ao longo do século XX. Como algumas dessas axiomáticas são freqüentemente usadas em vários contextos, é conveniente que travemos contato, ainda que por alto, com algumas das principais.

3.3.1 Axiomática de Whitehead-Russell

O sistema em questão foi proposto originalmente por Whitehead e Russell na primeira edição dos *Principia Mathematica*, e tem como conectivos primitivos $\neg$ e *vee*; a expres são $\alpha \to \beta$ é usada para abreviar $\neg\alpha \to \beta$. Os axiomas são os seguintes, na forma que lhes deram Hilbert e Ackermann, ainda que aqui usemos esquemas de axiomas; a única regra é Modus Ponens:

(1) $\alpha \vee \alpha \to \alpha$

(2) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

(3) $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

(4) $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta)$

Na verdade, Whitehead e Russell usaram ainda um quinto axioma, a saber, $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \to \beta \vee (\alpha \vee \gamma)$, que no entanto foi mostrado ser redundante por Paul Bernays em 1926.

3.3.2 Axiomática de Frege-Łukasiewicz

O sistema que pode ser dito remontar ao *Begriffsschrift* de G. Frege (exceto pela notação) tem os conectivos $\neg$ e $\to$ como primitivos, e os seguintes axiomas (a única regra é Modus Ponens) (ver Tarski 1983, p. 43):

(1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(3) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

(4) $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

(5) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

(6) $\alpha \to \neg\neg\alpha$

Posteriormente, Jean Łukasiewicz mostrou que estes seis axiomas podem ser substituídos por somente três, a saber:

(1) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

(2) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

(3) $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

3.3.3 Axiomática de Kleene

O sistema apresentado por S. C. Kleene em 1952 tem os seguintes conectivos primitivos: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\neg$, e a única regra é Modus Ponens. Os axiomas são:

(1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(2) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(3) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

(4) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

(5) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$

(6) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$

(7) $\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$

(8) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$

(9) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$

(10) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$

3.3.4 Sistemas com um único axioma

Usando-se os conectivos de Sheffer vistos acima, pode-se apresentar sistemas de axiomas para o cálculo proposicional com um único axioma. Por exemplo, Nicod apresentou em 1917 a seguinte axiomática, que tem $|$ como único conectivo lógico:

$$(A|(\beta|\gamma))|((\delta|(\delta|\delta))|((\epsilon|\beta)|((\alpha|\epsilon)|(\alpha|\epsilon))))$$

A única regra de inferência é a seguinte: γ segue de α de de $\alpha|(\beta|\gamma)$.

Se usarmos $\neg$ e $\rightarrow$ como primitivos, podemos ter um sistema com um único axioma, a saber (Meredith, 1953), cuja única regra de inferência é Modus Ponens:

$$((((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\delta)) \rightarrow \gamma) \rightarrow \epsilon) \rightarrow ((\epsilon \rightarrow \alpha) \rightarrow (\delta \rightarrow \alpha))$$

3.4 Digressão: Inconsistências e Trivialidade

Uma teoria T tal que todas as fórmulas de sua linguagem sejam teoremas de T é dita *trivial*. Uma teoria trivial, aparentemente, não tem qualquer utilidade, pois não se pode distinguir as suas 'verdades' de suas 'falsidades'. Fato relevante é que uma teoria, se for baseada na lógica clássica (ou mesmo na maioria dos sistemas, mesmo não clássicos) é inconsistente se e somente se for trivial. Isso de deve ao seguinte fato. O teorema 3.0.4 visto acima mostrou que se derivarmos em T tanto α quanto $\neg\alpha$, então todas as fórmulas de sua linguagem serão teoremas dessa teoria, ou seja, T será trivial. A recíproca é simples: se em T derivamos qualquer fórmula de sua linguagem, então derivamos $\alpha \wedge \neg\alpha$ e T é inconsistente. Como se percebe claramente, a presença de uma contradição viola o Princípio da Contradição visto anteriormente.

Este fato certamente é o principal motivo pelo 'horror a contradições' que há na lógica tradicional e na matemática. Aliás, um dos pontos do célebre Programa de Hilbert consistia precisamente em provar a consistência das teorias matemáticas [Pra93], ou sejaq, livrá-las das contradições. No entanto, a lida com inconsistências de alguma forma sempre foi assunto de certas áreas da filosofia, e a sua presença haveria de ser estudada de um ponto de vista lógico com mais detalhe. Entre 1910 e 1913, o polonês Jean Łukasiewicz (1876-1956) e o russo Nicolai Vasiliev (1880-1940) salientaram, de forma independente, que similarmente ao que se deu com os axiomas da geometria euclidiana, alguns princípios da lógica aristotélica poderiam ser revisados, dentre eles o Princípio da Contradição. Como é bem sabido, em geometria os questionamentos acerca do chamado Quinto Postulado de Euclides mostrou que ele era independente dos demais axiomas da geometria euclidiana (os matemáticos queriam saber se o quinto postulado, dito Postulado das Paralelas, que não era tãoi intuitivo quanto os demais, podia ser deduzido desses), podendo portanto ser substituído por alguma forma de negativa, originando-se com isso as chamadas "geometrias não-euclidianas". Uma delas, a geometria Riemanniana, foi usada por Albert Einstein (1879-1955) na formulação da relatividade geral. A relevância dessas geometrias, antes tidas como meras especulações matemáticas, tornou-se patente; de forma breve, podemos dizer que a "geometria do mundo"(de acordo com a teoria da relatividade), é não-euclidiana.

Łukasiewicz e Vasiliev preocuparam-se com a possibilidade da derrogação do Princípio da Contradição, mas não construíram sistemas lógicos estrito senso que dessem vazão a esta possibilidade. Foi um discípulo de

Łukasiewicz, S. Jaśkowski (1906-1965), que apresentou em 1948 um sistema lógico que poderia ser aplicado a sistemas envolvendo inconsistências sem que no entanto resultasse que todas as suas fórmulas pudessem ser derivadas como teoremas. O sistema de Jaśkowski no entanto limitou-se ao cálculo de proposições. Foi o lógico brasileiro Newton C. A. da Costa (1929-), então professor da UFPR que, independentemente de Jaśkowski (cujos trabalhos haviam sido publicados em polonês), iniciou a partir da década de 50 estudos no sentido de desenvolver sistemas lógicos que pudessem envolver contradições, motivado por questões de natureza tanto filosóficas quanto matemáticas. Os sistemas de da Costa se estenderam muito além dos de Jaśkowski, abrangendo-os como casos particulares. Da Costa é reconhecido internacionalmente como o criador das lógicas ditas *paraconsistentes* (o termo "paraconsistente", que literalmente significa "ao lado da consistência", foi cunhado somente em 1976 pelo filósofo peruano Francisco Miró Quesada).

Como campo de pesquisa, a lógica paraconsistente desenvolveu-se extraordinariamente a partir de então, tendo atraído a atenção de numerosos lógicos e filósofos em todo o mundo. Em 1997, realizou-se em Gent, na Bélgica, o Primeiro Congresso Mundial sobre Paraconsistência. O segundo foi realizado no Brasil em 2000 e o terceiro em 2003 na França. A partir de 1991, a celebrada *Mathematical Reviews* (talvez o principal índice de matemática e ciências afins da atualidade) passou a contar com o verbete 00B38: Paraconsistent Logic. A partir de 2000, este verbete foi incorporado a um mais amplo envolvendo tópicos similares. Isso significa que um novo ramo do conhecimento foi criado, por sinal bastante amplo, como indica a expressão 'paraconsistência' usada nos congressos, que não se limitam a ser encontros de lógicos. Em termos de ciência ciência brasileira, isso significa muito. No Brasil, grande parte devido à influência de da Costa, originou-se uma forte escola de lógica, inicialmente em São Paulo e Campinas, havendo surgido lógicos que granjearam reputação internacional. Hoje, a lógica paraconsistente constitui tema obrigatório de estudo de qualquer estudante de lógica, filosofia ou ciência da computação mas, devido às aplicações recentes cada vez mais interessantes que tem encontrado, tem interessado também a estudantes de física e de engenharia, além da matemática, obviamente. Para maiores detalhes sobre este tema, o leitor pode consultar as obras de da Costa listadas nas nossas referências; sobre os trabalhos de Vasiliev, ver [Arr90].

Apêndice A
Reticulados e Álgebras de Boole

QUANDO VIMOS A semântica do Cálculo Proposicional, usamos o conceito de Álgebra de Boole. Como tais álgebras têm uma importância geral, é conveniente que vejamos sua definição, e isso será aqui feito a partir da definição de reticulado. Novas analogias com a física poderão então ser introduzidas.

Definição 3.4.1 *Um* **reticulado** *é uma estrutura* $\mathcal{R} = \langle X, \sqcap, \sqcup \rangle$, *sendo:*

(1) X um conjunto não vazio;

(2) $\sqcap$ e $\sqcup$ operações binárias sobre X;[3]

(3) Para todos x, y e z de X tem-se:

(i) $x \sqcap y = y \sqcap x$ e $x \sqcup y = y \sqcup x$ (comutatividade)

(ii) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ e $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ (associatividade)

(iii) $x \sqcap x = x$ e $x \sqcup x = x$ (idempotência)

(iv) $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ e $x \sqcup (x \sqcap y)x$ (absorção)

Como ocorre normalmente, ao invés de nos referirmos à estrutura $\mathcal{R}$, é comum dizer que X é um reticulado (referido-nos, deste modo, somente ao conjunto em consideração). Por vezes, procederemos deste modo. O elemento $x \sqcap y$ ($x \sqcup y$) é dito *produto*, *ínfimo*, *encontro* (respect., *soma*, *supremo*, *junção*)

[3]Uma **operação binária** sobre X é uma aplicação de $X \times X$ em X. Se $*$ denota uma tal operação, a imagem do par $\langle x, y \rangle$ pela aplicação $*$ é em geral denotado por $x * y$; seguiremos este procedimento. Por exemplo, na definição em questão as notações $x \sqcap y$ e $x \sqcup y$ são as imagens de $\langle x, y \rangle$ por $\sqcap$ e $\sqcup$ respectivamente.

de x e y. Os termos 'produto' e 'soma' serão usados alternativamente para denotar tais elementos, no que se segue.

Pode-se mostrar que qualquer conjunto finito $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de X tem uma soma e um produto, denotados respectivamente por $\bigvee_{i=1}^{n} x_i$ e $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$.

Exemplo 3.4.1 Seja Y conjunto qualquer e considere $X = \mathcal{P}(Y)$. Então, para x e y em X, poẽ-se: $x \sqcap y =_{\mathsf{d}ef} x \cap y$ e $x \sqcup y =_{\mathsf{d}ef} x \cup y$. É facil ver que a estrutura que daí resulta é um reticulado (veja exercício abaixo).

Exemplo 3.4.2 Tome X como sendo o conjunto dos números naturais não nulos $1, 2, \ldots$ e defina $x \sqcap y =_{\mathsf{d}ef} mdc(x, y)$ e $x \sqcup y =_{\mathsf{d}ef} mmc(x, y)$ para quaisquer x e y em tal conjunto.[4] Neste caso, também resulta que a estrutura assim obtida é um reticulado (exerçícios).

Observação: Um *conjunto parcialmente ordenado* (poset) é um par $\langle X, R\rangle$ constituído por um conjunto não vazio X e uma relação de ordem parcial R sobre X, ou seja, uma relação binária sobre X que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Em geral, ao invés de xRy, escreve-se $x \leq y$ para se designat que o par $\langle x, y\rangle$ está na relação R, mas observa-se que nem sempre $\leq$ denota a conhecida relação de 'menor ou igual que' entre números. Nessa situação,

Definição 3.4.2 *Seja $\mathcal{R}$ um reticulado. Sobre X definimos a relação seguinte, para todos x e y de X:*

$$x \leq y \text{ see } x \sqcap y = x \text{ see } x \sqcup y = y$$

Considerando o primeiro exemplo dado acima, nota-se que $a \leq b$ se e somente se $a \subseteq b$, ou seja, se a for subconjunto de b. No segundo exemplo, repare que, por exemplo, $1 \leq 3$, $3 \leq 9$, mas $\neg(2 \leq 3)$ pois o mmc entre 2 e 3 não é 3 (nem o mdc entre eles é 2).

É imediato provar que $\leq$ é uma ordem parcial sobre X.

Exercício 3.4.1 Confirme o que se disse nos exemplos 1.1 e 1.2 acerca das estruturas em questão serem reticulados. Prove que a relação $\leq$, tal como definida no parágrafo precedente, é de fato uma relação de ordem parcial sobre X.

---

[4]Usaremos p símbolo '$=_{def}$' para denotar 'igual por definição'.

3.5 Reticulados como sistemas ordenados

A definição acima estabeleceu um reticulado como uma 'estrutura algébrica', ou seja, como um certo conjunto dotado de operações e relações entre seus elementos satisfazendo determinadas propriedades. No entanto, um reticulado é uma estrutura tão peculiar que também pode ser visto como uma 'estrutura de ordem'.[5] Para tanto, admita que, ao invés de partirmos do conjunto X munido das duas operações binárias referidas na definição acima, através das quais pudemos definir a ordem parcial como fizemos, partíssemos de um sistema parcialmente ordenado $\langle X, \leq \rangle$ (ou seja, de um conjunto X dotado de uma ordem parcial $\leq$).

Então, munidos tão somente da ordem parcial sobre X, poderíamos definir as operações $\sqcap$ e $\sqcup$ como se segue: para quaisquer x e y de X, $x \sqcap y$ é tomado como o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$, ou seja, aquele elemento elemento $i \in X$ tal que (1) $i \leq x \sqcap i \leq y$ para todos x e y de X e (2) se $a \leq x \sqcap a \leq y$ para algum $a \in X$, então $a \leq i$. Analogamente, $x \sqcup y$ será o supremo de $\{x, y\}$, ou seja, aquele elemento $s \in X$ tal que (1) $x \leq s \sqcap y \leq s$ para todos $x, y \in X$ e (2) se $x \leq a \sqcap y \leq a$, então $s \leq a$.

Nada garante que, num sistema ordenado $\langle X, \leq \rangle$, exista o supremo ou o ínfimo de dois de seus elementos (na verdade, deveríamos dizer 'supremo e ínfimo do *conjunto* formado pelos dois elementos'); mas, no entanto, *se* tais elementos existirem, resultam válidas as condições da definição dada de reticulado, de sorte que se pode estabelecer a seguinte definição.

Definição 3.5.1 *Um* **reticulado** *é um conjunto parcialmente ordenado X tal que qualquer subconjunto de X que tenha apenas dois elementos tem supremo e ínfimo.*

Ou seja, dados quaisquer x e y em X, *existem* o supremo e o ínfimo de x e y (ou melhor, do conjunto $\{x, y\}$).

Definição 3.5.2 *Um reticulado é* **completo** *se todo subconjunto de X tem supremo e ínfimo, em particular o próprio X. Em um reticulado completo, o ínfimo de X é denominado* **zero** *do reticulado, enquanto que o supremo*

[5] Essa distinção é fundamental para certos propósitos. Para Bourbaki, as estruturas da matemática usual são certas combinações de estruturas de três tipos básicos: algébricas, de ordem e topológicas; por exemplo, os números reais são caracterizados como constituindo um 'corpo (estrutura algébrica) ordenado (ordem) completo (estrutura topológica).

de X é denominado **um** *(ou* **unidade***) do reticulado. Esses elementos são denotados* **0** *e* **1** *respectivamente. No caso, tais elementos coincidem com o menor e com o maior elementos de X respectivamente.*[6]

É imediato provar que todo reticulado finito (i.e., tal que X é um conjunto finito) é completo.

Definição 3.5.3 *Um reticulado X com* **0** *e* **1** *é* **complementado** *se para cada $x \in X$ existe um elemento $x' \in X$ (dito* **complemento** *de x) tal que $sup(\{x, x'\}) = \mathbf{1}$ (ou seja, $x \sqcup x' = \mathbf{1}$) e $inf(\{x, x'\}) = \mathbf{0}$ (ou seja, $x \sqcap x' = \mathbf{0}$).*

O elemento x' da definição precedente é dito *complemento* de x.

Para um reticulado qualquer X, tem-se o seguinte teorema, sendo x, y, z elementos arbitrários de X:

Teorema 3.5.1

(i) $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$

(ii) $x \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$

Ou seja, em geral não valem as Leis Distributivas. Quando isso acontece, o reticulado é dito **distributivo**.

Exemplo 3.5.1 Para qualquer conjunto X, $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ é um reticulado completo complementado tal que $\mathbf{0} = \emptyset$ e $\mathbf{1} = X$. O complemento de $A \in \mathcal{P}(X)$ é o conjunto $A' = X - A$. Este reticulado é distributivo.

Daremos agora um exemplo importante de um reticulado que não é distributivo. Lembremos que um espaço de Hilbert é um espaço vetorial $\mathcal{V}$ com produto interno $\langle \, | \, \rangle$ que é *completo* em relação à norma induzida pelo produto interno (ou seja, à norma $||\alpha|| =_{def} \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$; para detalhes, veja por exemplo [Hal78, Apêndice]. Para os propósitos deste exemplo, basta tomar $\mathcal{V}$ como um espaço vetorial *finito* com produto interno, que resulta completo, como se pode mostrar.

[6] Seja $\langle X, \leq \rangle$ um sistema parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um elemento $a \in Y$ é **menor elemento** (**mínimo, primeiro**) de Y se $a \leq x$ para todo $x \in Y$. Analogamente, um elemento $b \in Y$ é **maior elemento** (**máximo, último**) elemento de Y se $x \leq b$ para todo $x \in Y$.

Seja então $\mathcal{V}$ um espaço de Hilbert e seja X como o conjunto dos subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$, e seja $U^{\perp}$ o complemento ortogonal de $U \in X$, ou seja, o subsepaço $U^{\perp} = \{\alpha \in \mathcal{V} : \langle\alpha|\beta\rangle, \forall\beta \in U\}$.

Dados U e W em X, definimos $U \sqcap W$ como sendo a interseção $U \cap W$, e $U \sqcup W$ como sendo o subespaço *gerado* por $U \cup W$. A razão de se proceder deste modo é que nem sempre a união de subespaços é um subsepaço vetorial, como se sabe. Isso posto, é fácil perceber que tais operações satisfazem os axiomas correspondentes da definição de reticulado, e além disso o subsepaço trivial O (cujo único elemento é o vetor nulo de $\mathcal{V}$) e o próprio $\mathcal{V}$ desempenham o papel dos elementos zero e um de um reticulado, respectivamente.

Note agora que a operação de associar a cada subsepaço de $\mathcal{V}$ o seu complemento ortogonal satisfaz as operações de complementação em um reticulado. Desse modo, pode-se perceber que temos às mãos um reticulado complementado. No entanto, ele não é distributivo. Com efeito, basta tomar $\mathcal{V}$ como o espaço euclidiano $\Re^2$ munido do produto interno canônico,[7] U, V e W subsepaços definidos respectivamente (e adequadamente) como correspondendo intuitivamente aos eixos OX, OY e à reta $x = y$. Nota-se então que $X \sqcup (Y \sqcap Z) = X$, ao passo que $(X \sqcup Y) \sqcap (X \sqcup Z) = \Re^2$.

3.6 Álgebras de Boole

Definição 3.6.1 *Uma Álgebra de Boole ou um* **reticulado booleano** *é um reticulado complementado e distributivo.*

Exercício 3.6.1 Mostre que para qualquer conjunto X, o conjunto $\mathcal{P}(X)$ munido da relação $\subseteq$ é uma álgebra de Boole.

As álgebras de Boole podem, alternativamente, ser caracterizadas do modo seguinte:

Definição 3.6.2 *Uma* **Álgebra de Boole** *é uma sextupla ordenada*

$$\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, *, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$$

na qual:

(i) B é um conjunto não vazio

[7] Ou seja, para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \Re^2$, tem-se $\langle(x_1, x_2)|(y_1, y_2) =_{\mathsf{def}} x_1y_1 + x_2y_2$.

(ii) $\sqcup$ e $\sqcap$ são operações binárias sobre B; usaremos a notação habitual $x \sqcap y$ e $x \sqcup y$ em sentido óbvio.

(iii) $*$ é uma operação unária sobre B. Do mesmo modo que no ítem anterior, escreveremos x^* para denotar a imagem do elemento $x \in B$ pela função $*$.

(iv) $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ pertencem a B

Ademais, para quaisquer x, y e z em B, os seguintes axiomas são satisfeitos:

(i) $x \sqcup y = y \sqcup x$ e $x \sqcap y = y \sqcap x$ (comutatividade)

(ii) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ e $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ (associatividade)

(iii) $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$ e $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ (distributividade)

(iv) $(x \sqcup y) \sqcap x = y$ e $(x \sqcap y) \sqcup x = x$ (absorção)

(v) $x \sqcap x = x$ e $x \sqcup x = x$ (idempotência)

(vi) $x \sqcap x^* = \mathbf{0}$ e $x \sqcup x^* = \mathbf{1}$ (complementaridade)

(vii) $x \sqcup \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $x \sqcap \mathbf{1} = x$, $x \sqcup \mathbf{0} = x$ e $x \sqcap \mathbf{0} = \mathbf{0}$

A álgebra é dita **degenerada** se contém um só elemento.

Como é comum, abusaremos da notação e denotaremos uma tal álgebra simplesmente por B, fazendo referência tão somente ao conjunto em questão.

Numa álgebra de Boole B, definimos uma **relação de ordem** do mesmo modo como fizemos para reticulados: para todos x e y em B,

$$x \leq y \leftrightarrow x \sqcap y = x$$

ou equivalentemente

$$x \leq y \leftrightarrow x \sqcup y = y$$

É de fácil verificação que para todo $x \in B$ tem-se que $x \leq \mathbf{1}$, que $\mathbf{0} \leq x$ e que $x \leq y$ see $x \sqcap y^* = \mathbf{0}$, ou seja, 0 e 1 tornam-se ínfimo e supremo de B respectivamente.

Exemplo 3.6.1 Sejam X um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto potência de X. Então, tomando $\sqcup$, $\sqcap$, *, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ respectivamente como $\cup$, $\cap$, $'$ (complemento de um subconjunto de X relativo a X), $\emptyset$ e X, então $\mathcal{P}(X)$ é uma álgebra de Boole.

Exemplo 3.6.2 Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico tal que $\overline{x}$ denota o fecho de $x \subseteq X$ e x^o denota o interior de x. Um conjunto $x \subseteq X$ é uma **aberto regular** se $x = (\overline{x})^o$ (ou seja, x é um aberto 'sem buracos'). Denotando por $Ro(X)$ o conjunto de todos os abertos regulares de X, definimos sobre este conjunto as operações seguintes, para todos u e v em $Ro(X)$: $u \sqcup v =_{\mathsf{d}ef} (\overline{u \cup v})^o$, $u \sqcap v =_{\mathsf{d}ef} u \cap v$, $u^* =_D X - \overline{u}$. Isto posto, consideramos ainda $0 =_D \emptyset$ e $1 =_D X$. Basta agora comprovar (exercício) que $Ro(X)$ é uma álgebra de Boole completa.

Exemplo 3.6.3 A álgebra de Boole 2 é definida do seguinte modo. O domínio é o conjnto $\{0, 1\}$, $\sqcap$ e $\sqcup$ são definidas como $x \sqcap y =_{\mathsf{d}ef}$ ínf$\{x, y\}$ e $x \sqcup y =_{\mathsf{d}ef}$ máx$\{x, y\}$ respcetivamente. Ademais, $0^* = 1$ e $1^* = 0$.

Exemplo 3.6.4 Exemplo importante de uma álgebra de Boole é dada na axiomatização de W. Noll para a mecânica do contínuo.[8] Noll toma um conjunto Ω de 'corpos' (físicos) e uma ordem parcial $\prec$ sobre Ω. Se $a \prec b$, diz-se que o corpo a é *parte* de b. Definindo então 0 como aquele corpo que é parte de todo corpo e ∞ como o corpo do qual todo corpo é parte (admitidos existirem), seja $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{0, \infty\}$. Pondo $a \sqcap b =_{\mathsf{d}ef} inf\{a, b\}$ e $a \sqcup b =_{\mathsf{d}ef} sup\{a, b\}$, é fácil ver que a estrutura resultante é uma álgebra de Boole. Aliás, os seis primeiros axiomas de Noll (na versão de Truesdell) são precisamente aqueles que dotam o conjunto $\overline{\Omega}$ de uma estrutura de álgebra de Boole.

Exemplo 3.6.5 [O reticulado subjacente à Mecânica Clássica] Seja σ um sistema físico (no domínio do discurso da Mecânica Clássica (MC)). Por exemplo, σ pode ser uma partícula clássica. De acordo com o formalismo matemático standard da MC, podemos associar a σ uma 'representação matemática', um *espaço de fase* Γ, que é identificado com o conjunto de todas as sextuplas de números reais $\langle x_1, \ldots, x_6 \rangle$, onde x_1, x_2 e x_3 são as coordenadas de *posição* e x_4, x_5 e x_6 são as coordenadas de *momento* de σ.

[8] Descrita no livro de Truesdell [Tru77, Cap. 1].

Ademais, assume-se que qualquer elemento $p \in \Gamma$ representa um *estado puro* que σ pode assumir (os elementos de Γ são denominados 'pontos').

Uma *variável dinâmica* (um *observável*) $\overline{Q}$ que pode ser medida sobre σ é representada por uma função Q de Γ no conjunto dos reais. O real associado é interpretado como sendo o *valor* da medida do observável $\overline{Q}$ para σ em um determinado estado puro. Uma proposição expressando o resultado de uma medida do observável $\overline{Q}$ para σ num estado $p \in \Gamma$ diz em qual subconjunto $X \subseteq \Gamma$ o objeto ponto p é encontrado com certeza.

Desse modo, a cada proposição associa-se um elemento de $\mathcal{P}(\Gamma)$, o conjunto potência de Γ, que pode então ser visto como o sistema de todas as *propriedades possíveis* dos estados puros de Γ. Ou seja, $X \in \mathcal{P}(\Gamma)$ representa a extensão de uma *proposição* P que pode ser verdadeira ou falsa para cada estado puro $p \in \Gamma$: P será verdadeira para p se $p \in X$, e falsa se $p \notin X$, ou seja, se p pertencer ao complemento de X relativo a Γ.

Observação: Nota-se aqui uma sutileza importante, que terá consequências relevantes no contexto da física quântica. Trata-se a hipótese acima assumida de que, a cada *propriedade* P, acha-se associado um *conjunto* X, dito 'extensão de P', constituído por aqueles objetos do domínio que têm a propriedade P ou que, como se diz usualmente, 'caem' sob o conceito expresso por P. Essa hipótese é conhecida por Princípio de Frege. Falaremos mais sobre isso oportunamente, mas repare no pressuposto de se considerar 'conjuntos' como sendo as extensões dos predicados. A dificuldade mencionada relativamente à física quântica, vem do fato de que esta disciplina apresenta-nos casos de predicados que não têm uma extensão bem definida. Dito de modo breve: se conciderarmos o predicado "ter spin UP na direção X" (veja abaixo, ond se fala mais sobre o spin), que pode ser aplicada a uma certa coleção de elétrons, então podemos determinar experientalmente quantos são os elétrons da coleção que têm tal propriedade, mas nunca *quais são* eles. Assim, a extensão do predicado não fica bem caracterizada. Tal assunto, no entanto, foge aos objetivos desta Nota.

Feita a convenção acima de que as proposições acerca do estado de um sistema mecânico clássico podem ser feitas por referência a um espaço de fase Γ adequado no qual cada estado é representado por um 'ponto' P. Uma proposição expressando o resultado de uma medida estabelece em qual dos subconjuntos $S \subseteq \Gamma$ o ponto P pode ser encontrado. Assim, cada proposição p que possa ser associada a uma medição experimental corresponde a um subconjunto S_p de Γ e será verdadeira se o ponto P que representa o estado a que p diz respeito está em S_p e falsa em caso contrário. A conjunção $p \sqcap q$ (ou a disjunção $p \sqcup q$) de duas proposições p e q é verdadeira se pertence à interseção $S_p \cap S_q$ (respectivamente, pertence à união $S_p \cup S_q$). Por outro lado, o complemento p^* simplesmente diz que $p \notin S_p$. Se sempre que p é verdadeira q também é verdadeira, então $S_p \subseteq S_q$; este fato é escrito $p \leq q$ e diz-se que p *implica* q. É fácil ver que esta relação é uma ordem parcial; assim, pode-se dizer que p e q são *equivalentes*, e escrever $p = q$ se $p \leq q$ e $q \leq p$.

Isto posto, uma *quantidade física* é definida como sendo a coleção de todas as proposições 'experimentais' equivalentes (no sentido acima) a uma dada proposição; em símbolos, $[p] = \{q : q = p\}$, para dada p.[9] Então, a ordem parcial acima permite definir uma orem parcial (como se pode provar) sobre tais coleções, pondo $[p] \leq [q]$ see $p \leq q$, o que mostra que as qualidades físicas atribuíveis a um sistema físico (clássico) formam um sistema parcialmente ordenado e, como vale a distributividade e as demais propriedades relevantes, a conclusão de Birkhoff e von Neumann é que o cálculo proposicional da mecânica clássica é uma álgebra de Boole. Para maiores detalhes, consultar o livro de Jauch [Jau68] e [Jam74, loc. cit.].

Exemplo 3.6.6 [O reticulado subjacente à Mecânica Quântica] Daremos aqui apenas idéias bastante gerais, seguindo um exemplo informal que fornece argumentos para que se entenda porque a lógica subjacente à mecânica quântica não seria clássica. Este argumento, no entanto, tem sofrido objeções por parts dos físicos, como se pode verificar em [Pes99]. No entanto, essas objeções não comprometem o que estamos descrevendo aqui, de forma que acreditamos ser lícito mater o exemplo. Para detalhes mais precisos, ver as obras citadas acima.

Em física, há certas grandezas que podem ser medidas. Um exemplo é o *spin* de uma determinada partícula, digamos um elétron, que pode ser avaliada segundo uma direção determinada. É um *fato* da física que o spin de um elétron pode assumir apenas um dentres dois valores : 1/2 ou -1/2 (que vamos denotar simplesmente por + e -). Consequentemente, chamando de s_e^x o spin do elétron e na direção x, então obviamente, em virtude do que se disse acima, $s_e^x = + \vee s_e^x = -$. Outro fato aceito pala mecânica quântica é o Princípio de Heisenberg (para spin), que asserta que o spin de uma partícula

[9]Esta definição foi dada por Birkhoff e von Neuman; o aqui exposto segue [Jam74, p. 247].

não pode ser medido simultaneamente em duas direções distintas. Suponha agora que x e y sejam duas direções distintas e que obtivemos $s_e^y = +$. Então, podemos dizer que

$$s_e^y = + \wedge (s_e^x = + \vee s_e^x = -)$$

Mas então, usando a lógica proposicional (em especial, a Lei Distributiva $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$), obtemos:

$$(s_e^y = + \wedge s_e^x = +) \vee (s_e^y = + \wedge s_e^x = -).$$

No entanto, qualquer uma das espressões dessa disjunção ou é falsa ou sem sentido, em virtude do que se disse acima. Em outras palavras, a Lei Distributiva, uma das mais fundamentais da lógica tradicional, falha no contexto da mecânica quântica. Este fato foi o ponto de partida para uma das mais importantes abordagens lógico-matemáticas que se fez à física feita neste século, devida a J. von Neumamm e G. Birkhoff, na década de 30. Em resumo, eles verificaram que o reticulado subjacente às proposições da mecânica quântica não era uma Álgebra de Boole, como ocorre no caso da MC, em virtude da falha da Lei Distributiva. Na verdade, a estrutura algébrica que se usa é o que se denomina um reticulado **modular ortocomplementado**. Os detalhes devem ser vistos nos livros acima mencionados.

3.7 Álgebra de Lindenbaum associada ao Cálculo Proposicional Clássico

Dito de modo geral, uma álgebra de Lindenbaum, ou de Lindenbaum-Tarski, é um conjunto de classes de equivalência obtidas a partir de uma relação de equivalência (desejável que seja ainda uma congruência) definida sobre o conjunto de fórmulas de uma certa lógica. Veremos de que forma se obtém a álgebra de Lindenbaum associada ao cálculo proposicional clássico.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das fórmulas do cálculo proposicional clássico, o qual denotaremos por L. Para fórmulas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ em $\mathcal{F}$, definimos a relação seguinte:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \text{see} \quad \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$$

Exercício 3.7.1 Prove que $\equiv$ é uma relação de equivalência sobre $\mathcal{F}$.

Denotaremos as classes de equivalência obtidas como acima por $[\mathcal{A}]$, para $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, de sorte que temos o conjunto quociente

$$\mathcal{F}/_{\equiv} = \{[\mathcal{A}] : \mathcal{A} \in \mathcal{F}\}$$

Definimos agora

$$[\mathcal{A}] \leq [\mathcal{B}] \quad \text{see} \quad \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

Exercício 3.7.2 Mostre que a definição de $\leq$ independe da escolha das fórmulas de $\mathcal{F}$ usadas para definí-la e que $\leq$ é uma relação de ordem parcial sobre $\mathcal{F}$.

Teorema 3.7.1 $\mathcal{C} = \langle \mathcal{F}/_{\equiv}, \leq \rangle$ é uma álgebra de Boole.

Apêndice B
Indução e Recursão

3.8 Indução

Um tipo de construção muito útil em lógica e em matemática é aquela que nos permite 'construir' um certo subconjunto de um dado conjunto X partindo de um elemento qualquer de X (ou de alguns elementos) e, aplicando certas operações, exprimir a idéia do "e assim por diante". O conjunto procurado é o 'menor' conjunto que contém o(s) elemento(s) destacado(s) e é fechado para as operações em questão. Qualquer elemento deste subconjunto será um elemento de X que pode ser obtido a partir do(s) elemento(s) inicial(ais) pela aplicação das operações em selecionadas um número finito de vezes.

Por simplicidade, consideremos um caso particular no qual há conjunto inicial

$$B \subseteq X$$

e uma classe F de funções com pelo menos dois elementos f e g, sendo

$$f : X \times X \mapsto X \;\text{ e }\; g : X \mapsto X.$$

Sendo $a, b \in B$, o conjunto procurado, que vamos chamar de C, conterá por exemplo

$$b, f(b,b), g(a), f(g(a), f(a,b)), \;\text{'}\textit{e assim por diante}\text{'}$$

Dizemos que $S \subseteq X$ é *indutivo* se $B \subseteq S$ e S é fechado para as operações f e g. Seja C a interseção de todos os subconjuntos indutivos de X; é fácil ver que C é indutivo e que é o 'menor' conjunto indutivo, no sentido de estar contido em todos os outros. Este C é dito *gerado* por B mediante f e g. Vem então o seguinte

Princípio de Indução Suponhamos que C seja gerado por B por meio das funções em F. Se S é um subconjunto de C que inclui B e é fechado relativamente às operações de F, então $C = S$.

Como obter este conunto C? Um modo de gerar C a partir de $B \subseteq X$ por meio de funções em F é o seguinte. Chamamos de *seqüência de formação* uma seqüência finita

$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$$

de elementos de X tais que, para cada $i \leq n$,

$x_i \in B$ ou

$x_i = f(x_j, x_k)$, com $j, k < i$ ou

$x_i = g(x_j)$, com $j < i$.

Assim, C será o conjunto de todos os x que são o último elemento de uma seqüência de formação. Para obtê-lo, basta consider C_n como o conjunto de todos os x cujas seqüências têm comprimento n. Então vem que

$$C_1 = B \;\text{ e }\; C = \bigcup_n C_n.$$

Um exemplo importante, que explica o próprio sentido da palavra 'indução' (finita) em matemática é o seguinte.[10] Suponha que X é o conjunto dos números naturais, que chamaremos, como é usual, de $\mathbb{N}$. Sejam ainda $B = \{0\}$ e $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ a única função em F, dita 'função sucessor', definida assim: para cada $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$. Deste modo, as seqüências $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ ficam:

$$\langle 0 \rangle$$

$$\langle 0, 1 \rangle$$

$$\langle 0, 1, 2 \rangle$$

[10] A palavra 'finita' foi colocada aqui entre parênteses porque há outras formas de indução distintas da que estamos considerando, como a indução *transfinita*.

$$\vdots$$

Então, sendo C_n como acima para $n \in \mathbb{N}$, temos que o conjunto resultante C é o próprio conjunto $\mathbb{N}$, ou seja,

$$C = \bigcup_n C_n = \mathbb{N}.$$

Em outras palavras, $\mathbb{N}$ é o 'menor' conjunto indutivo gerado a partir do zero (na verdade, a partir do conjunto cujo único elemento é o zero) por meio da função sucessor. Em outras palavras, como C é o 'menor' conjunto indutivo, então $\mathbb{N}$ é o 'menor' conjunto de números naturais que contém o zero e o sucessor de cada um de seus elementos, ou, como expressamos informalmente,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Vejamos um outro exemplo utilzando aquilo que já aprendemos antes. Aqui, X é o conjunto de todas as *expressões* da linguagem do Cálculo Proposicional Clássico estudado anteriormente. Queremos caracterizar o conjunto C de suas *fórmulas*. Para isso, vamos considerar um conjunto inicial B de todas as variáveis proposicionais $A, B, C, \ldots$ (que, como você deve lembrar, são fórmulas). Então, para F tomamos o conjunto cujos elementos são as funções abaixo definidas, para α e β fórmulas quaisquer:

$$\xi_\neg(\alpha) = \neg\alpha$$

$$\xi_\wedge(\alpha, \beta) = \alpha \wedge \beta$$

$$\xi_\vee(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$$

$$\xi_\rightarrow(\alpha, \beta) = \alpha \rightarrow \beta$$

$$\xi_\leftrightarrow(\alpha, \beta) = \alpha \leftrightarrow \beta$$

Tomamos agora todas as seqüências finitas $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle$ com $x_0 \in B$ (ou seja, x_0 é uma variável proposicional) e para cada x_i restante, ou $x_i = \xi_\neg(x_j)$, com $j < i$ ou $x_i = \xi_*(x_j, x_k)$, com $j, k < i$ e $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. O conjunto de todos os x_n assim obtidos é precisamente o conjunto das fórmulas de nosso cálculo. O Princípio da Indução vai dizer que esse conjunto é o *menor* conjunto que contém todas as fórmulas.

3.9 Recursão

Como anteriormente, são dados X e $B \subseteq X$, além de duas funções f e g como acima (como acima, ficaremos restritos a este caso particular mais simples). Seja C o conjunto gerado por B a partir de f e g. O problema agora é definir uma função h sobre C qua aja *resursivamente*. Intuitivamente, isso funciona do seguinte modo: supomos que seja dados

1. Regras para computar $h(x)$, para cada $x \in B$
2. Regras para computar $h(f(x, y))$, fazendo uso de $h(x)$ e de $h(y)$
3. Regras para computar $h(g(x))$, usando-se $h(x)$.

Tomemos um exemplo. Seja B um conjunto qualquer de variáveis proposicionais do nosso cálculo. Vimos que uma *valoração* é uma aplicação $v : B \mapsto \mathbf{2}$; como anteriormente, se $v(P) = 1$, dizemos que P é *verdadeira* para a valoração dada, e P será *falsa* se $v(P) = 0$. Seja agora o conjunto C gerado por B a partir das funções $\xi_\neg, \xi_\wedge, \xi_\vee, \xi_\to$ e $\xi_\leftrightarrow$ acima.

Vamos agora definir, para cada valoração v, uma aplicação $v' : C \mapsto \mathbf{2}$ como fizemos na seção2.1, ou seja:

(a) Para cada $P \in B$, $v'(P) = v(P)$

(b) $v'(\neg\alpha) = (v'(\alpha))^*$, onde x^* denota o complemento de x na álgebra de Boole $\mathbf{2}$

(c) $v'((\alpha \to \beta)) = (v'(\alpha))^* \sqcup v'(\beta)$, etc.

Como dito naquela oportunidade, a questão agora é provar que há uma única v que preenche as condições acima. O que garante isso é o Teorema da Recursão visto a seguir.

3.10 O Teorema da Recursão

Como deve ter ficado claro acima, a idéia intuitiva da *indução* é a de, por assim dizer, legitimar o 'e assim por diante'. Ou seja, admita que iniciamos com um certo elemento a (em algum conjunto X) e, mediante alguma função h definida sobre X, obtemos $h(a)$, $h(h(a))$, 'e assim por diante'. Ou seja, a função h, tomada reiteradamente, fornece algum modo de 'passar de um elemento de X para outro', e deste para outro ainda, e assim por diante. A partir dessa função h definimos então uma outra função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo $f(0) = a$, $f(1) = h(a) = h(f(0))$, $f(2) = h(1) = h(f(1))$, e (de novo!!) assim por diante. A função f provê então a idéia de que formamos uma sequência[11] mediante os valores sucessivos da função h; o 'e assim por diante' seria justificado se conseguirmos explicar adequadamente o processo de indução. O artifício da indução (i.e., a sua 'descrição precisa') teria que dizer que faz sentido haver uma função como a f acima, definível a partir de uma tal h. Mas, será que há mesmo uma tal função? A garantia desse fato vem do teorema abaixo.

Teorema 1 (Recursão) *Seja $\mathcal{P}$ um sistema de Peano e X um conjunto qualquer tal que $a \in X$. Ademais, seja $h : X \to X$ uma função. Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \to X$ tal que:*

$$f(0) = a$$
$$f(Sn) = h(f(n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Demonstração: Uma função de $\mathbb{N}$ em X é um certo conjunto de pares ordenados da forma $\langle n, x\rangle$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Chamemos de C a coleção de todos os subconjuntos A de $\mathbb{N} \times X$ para os quais $\langle 0, a\rangle \in A$ e que $\langle Sn, h(x)\rangle \in A$ sempre que $\langle n, x\rangle \in A$. Evidentemente esta coleção não é vazia, posto que ao menos $\mathbb{N} \times X$ tem estas propriedades. Seja f a interseção de todos os conjuntos desta coleção, a qual pertence a C, ou seja, tem também as propriedades desejadas. Se mostrarmos que f é uma função, teremos obtido o que solicita o teorema. Faremos a prova por indução, olhando-a do seguinte modo: o que estamos tentando provar é que se $\langle n, x\rangle \in f$ e se $\langle n, y\rangle \in f$, então $x = y$. Ou seja, a 'propriedade' (vamos designá-la 'P') de números naturais a ser investigada ser uma propriedade de todos os números naturais é a seguinte: "para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único x tal que $\langle n, x\rangle \in f$". Inicialmente veremos que 0 tem esta propriedade. Já temos que $\langle 0, a\rangle \in f$ por definição de f; resta provar que não há outro $b \neq a$ tal que $\langle 0, b\rangle \in f$. Com efeito, se há um tal b, podemos considerar o conjunto $f - \{\langle 0, b\rangle\}$, que ainda contém $\langle 0, a\rangle$ e contém $\langle Sn, h(x)\rangle$ se contém $\langle n, x\rangle$; con efeito, como para todo n tem-se que $Sn \neq 0$, então $\langle 0, b\rangle \neq \langle Sn, h(n)\rangle$, ou seja, o elemento eliminado de f não é por certo

[11] Uma sequência de elementos de um conjunto X nada mais é do que uma função de $\mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais) em X.

$\langle Sn, h(x)\rangle$. Consequentemente, o conjunto $f - \{\langle 0, b\rangle\}$ pertence à coleção C definida acima. mas então há um 'menor' conjunto (a saber, $f - \{\langle 0, b\rangle\}$) que pertence à coleção e tem as propriedades requeridas para f, e f não poderia ser o 'menor' deles (a interseção de todos os conjuntos da coleção C). Logo não pode haver tal b e portanto 0 tem a propriedade acima mencionada. Suponhamos agora que n tem a propriedade P (hipótese de indução). Queremos mostrar que Sn também tem a propriedade P. Para tanto, note que a hipótese de indução indica que existe um único $x \in X$ tal que $\langle n, x\rangle \in f$. Mas então (por definição de f), temos que $\langle Sn, h(x)\rangle \in f$. Se fosse o caso de $Sn \notin f$ (isto é, se Sn não tem a propriedade P), então $\langle Sn, y\rangle \in f$ para algum $y \neq h(x)$. Formemos, em analogia como o que fizemos acima, o conjunto $f - \{\langle Sn, y\}$, o qual contém $\langle 0, a\rangle$ como elemento, posto que $0 \neq Sn$ para todo n e que conjunto diminuído contém $\langle Sm, h(t)\rangle$ sempre que contém $\langle m, t\rangle$. Então, das duas uma: $m = n$ ou $m \neq n$. No primeiro caso, o conjunto diminuído contém $\langle n, h(x)\rangle$ posto que $h(x0 \neq y$ pela imposição que fizemos acima. Se por outro lado $m \neq n$, então como $Sm \neq Sn$ (a função sucessor é injetiva), vem que o conjunto diminuído contém $\langle Sm, h(t)\rangle$. Em outras palavras, o 'conjunto diminuído' acima pertenceria à família C e seria 'menor' que f, contra a hipótese. Logo, Sn tem que ter a propriedade P e f é de fato uma função, como queríamos demonstrar. $\square$

Apêndice C
O significado das provas

O claro entendimento do significado de uma prova, ou demonstração, é uma das maiores conquistas da matemática, e deve isso ao desenvolvimento da lógica. Até meados do século XIX, as demonstrações careciam do rigor com que hoje estamos familiarizados. A este respeito, devemos dizer alguma coisa, principalmente com o intuito de mostrar que o próprio significado da palavra 'demonstração' evolui com o tempo e tem tido hoje em dia um papel relevante, principalmente devido às 'provas' realizadas por computadores.

(a ser escrito)

Bibliografia

Bibliografia

[Arr90] Arruda, A. I., *N. A. Vasiliev e a Lógica Paraconsistente*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Universidade de Campinas, 1990 (Coleção CLE Vol. VII).

[Bou68] Bourbaki, N., *Theory of sets*, Hermann & Addison-Wesley, 1968.

[Boy74] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Edgard Blucher-EdUSP, 1974.

[Cam00] Cameron, P. J., *Sets, Logic and Categories*, Springer Verlag, 2nd. ed., 2000.

[Coh89] Cohen, D. W., *An introduction to Hilbert spaces and quantum logic*, New York, Springer-Verlag, 1989.

[Cor73] Corcoran, J., 'Meanings of implication', *Dialogos* **25** (1973), 59–76. Reproduzido como 'Significados de la implicacion', *Agora*, **5** (1985), 279–294.

[Cos82] da Costa, N. C. A., 'Statement of purpose', *J. Non-Classical Logic* **1** (1), 1982, pp. i-v.

[Cos94] da Costa, N. C. A., *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, S. Paulo, Hicitec, 2a. ed., 1994.

[CosBez94] da Costa, N. C. A. et Béziau, J. -Y., 'Théorie de la valuation', *Logique et Analyse* **146**, 1994, pp. 95-117.

[Dal83] Dalla Chiara, M. L., 'Physical implications in a Kripkian semantical approach to physical theories', in M. L. Dalla Chiara et al. (eds.), *Logic in the 20th century*, Roma, Scientia, 1983, 37-51.

[Dev93] Devlin, K., *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*, Springer, 1993.

[End72] Enderton, H. B., *A mathematical introduction to logic*, New York and London, Academic Press, 1972.

[End77] Enderton, H. B., *Elements os set theory*, New York, Academic Press, 1977.

[Fer01] Ferreirós, J., 'The road to modern logic -an interpretation', *Bulletin of Symbolic Logic* **7** (4), Dec. 2001, pp. 441-484.

[Fra82] Franco de Oliveira, A. J., *Teoria de conjuntos: intuitiva e axiomática*, Lisboa, Livraria Escolar Editora, 1982.

[Haa74] Haack, S., *Deviant Logic*, Cambridge Un. Press, 1974.

[Hal74] Halmos, P. R., *Naive set theory*, Springer, 1974. Há tradução para o Português com o título *Teoria Ingênua de Conjuntos*.

[Hal78] Halmos, P. R., *Espaços vetoriais de dimensão finita*, Rio, Campus, 1978.

[Hod95] Hodel, R. E., *An introduction to mathematical logic*, PWS Pu. Co., 1995.

[Hof80] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguim Books, 1980.

[Jam74] Jammer, M., *Philosophy of Quantum Mechanics*, New York, John Wiley, 1974.

[Jau68] Jauch, T., *Foundations of quantum mechanics*. New York, Addison-Wesley, 1968.

[KneKne80] Kneale, W. e Kneale, M., *O desenvolvimento da lógica*, Lisboa, Fund. Calouste Gulbenkian, 2a. ed., 1980.

[Kne63] Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, 1963.

[Kri71] Krivine, J.-L., *Introduction to set theory*, Dordrecht, D. Reidel, 1971.

[Lip64] Lipschutz, S. *Theory and problems of set theory and related topics*, New York, Schaum Pu., 1964. Há tradução para o Português.

[Mos94] Moschovakis, Y. N., *Notes on set theory*, Springer, 1994.

[Man88] Mangani, P., *Appunti di logica matematica*, Firenze, C.D.O, 1988.

[Men87] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Monterey, Wadsworth & Brooks/Cole, 3rd. ed., 1987.

[Man88] Mangani, P., *Appunti di logica matematica*, Firenze, C.D.O, 1988.

[Man77] Manin, Yu. I., *A Course in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1977.

[Mat65] Mates, B., *Elementary Logic*, Oxford Un. Press, 1965.

[Men77] Mendelson, E., *Álgebra booleana e circuitos de chaveamento*, McGraw Hill, 1977 (Col. Schaum).

[Men87] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Chapman & Hall, 4rd. ed., 1997.

[Pes99] Pessoa Jr., O., 'A naturalistic review of a tratise on the logic of scientific knowledge', *Manuscrito* XXII (1), 1999, pp. 197-239.

[Pog94] Pogorzelski, W. A., *Notions and theorems of elementary formal logic*, Warsaw Un., Białystok, 1994.

[Pra93] Prawitz, D., 'Remarks on Hilbert's Program for the foundations of mathematics', in G. Corsi *et al.* (eds.), *Bridging the gap: philosophy, mathematics, and physics*, Dordrecht, Kluwer Ac. Pu, 1993, 87–98.

[Rus48] Russell, B., *Los Principios de la Matemática*, Espasa Calpe, 1948.

[Tar83] Tarski, A., *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Pu. Co., 2nd. ed. 1983.

[Tru77] Truesdell, C., *A first course in rational continuum mechanics*, Vol. I: General Concepts. New York, San Francisco and London, Academic Press, 1977.