Dedução Natural

Universidade do Vale do Rio dos Sinos
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Bacharelado em Ciência da Computação
Profa. Ana Paula Lüdtke Ferreira

Conseqüência lógica |—

- Diz-se que uma fórmula é uma *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas se sempre que estas forem verdadeiras aquela também seja verdadeira.
- Um argumento é dito *válido* se sua conclusão é conseqüência lógica de suas premissas.

Cálculos

- Cálculo = Lógica + Sistema de Prova
- Sistema de Prova = conjunto de axiomas + conjunto de regras de inferência
- Um sistema de prova serve para analisar e raciocinar sobre argumentos de uma lógica, de maneira a prová-los válidos ou inválidos.
- Cálculo Proposicional
- Cálculo de Predicados

Dedução Natural

- Coleção de *regras de inferência.*
- As regras de inferência da dedução natural consistem na inserção e retirada de operadores lógicos e quantificadores.
- Chama-se *dedução natural* por estar próxima da maneira como nós raciocinamos quando queremos (informalmente) provar um argumento.

Cálculo proposicional

- Operadores lógicos e proposições
- Seqüentes: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \vdash \phi$
  - Um seqüente é válido se uma prova para ele pode ser encontrada
  - Não se pode provar que determinado seqüente **não** é válido. Por que?

Regras da Dedução Natural

- Introdução da conjunção:

$$\frac{\varphi \qquad \phi}{\varphi \wedge \phi}$$

- Eliminação da conjunção:

$$\frac{\varphi \wedge \phi}{\phi}$$

$$\frac{\varphi \wedge \phi}{\varphi}$$

Exemplo de prova

- $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1.	$p \wedge q$	Premissa
2.	r	Premissa
3.	q	elim$\wedge$ 1
4.	$q \wedge r$	intr$\wedge$ 3,2

Exercício

- $(p\wedge q) \wedge r, s\wedge t \vdash q\wedge s$
- $p\wedge q \vdash q\wedge p$
- $(p\wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q\wedge r)$

Regras da Dedução Natural

- Eliminação da dupla negação

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$

- Introdução da dupla negação

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}$$

Exemplo

- $p, \neg\neg(q\wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1.	p	Premissa
2.	$\neg\neg(q\wedge r)$	Premissa
3.	$\neg\neg p$	intr $\neg\neg$ 1
4.	$q\wedge r$	elim $\neg\neg$ 2
5.	r	elim $\wedge$ 4
6.	$\neg\neg p \wedge r$	intr $\wedge$ 3,5

Regras da Dedução Natural

- Eliminação da implicação (*modus ponens*)

$$\frac{\phi \qquad \phi\rightarrow\varphi}{\varphi}$$

- Exercício:

1. $\neg p\wedge q, \neg p\wedge q \rightarrow r\vee\neg p \vdash r\vee\neg p$
2. $p\rightarrow(q\rightarrow r), p\rightarrow q, p \vdash r$
3. $p\rightarrow(p\rightarrow q), p \vdash q$

Regras da Dedução Natural

- Introdução da disjunção

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}$$

- Eliminação da disjunção

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad \phi\rightarrow\chi \qquad \psi\rightarrow\chi}{\chi}$$

Regras da Dedução Natural

- Introdução do bicondicional

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \psi \to \phi}{\phi \leftrightarrow \psi}$$

- Eliminação do bicondicional

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\phi \to \psi}$$

$$\frac{\phi \leftrightarrow \psi}{\psi \to \phi}$$

Raciocínio hipotético

Regras da Dedução Natural

- Introdução do condicional (prova do condicional)
  - De uma derivação de uma fórmula ψ a partir de uma hipótese ϕ, pode-se descartar a hipótese e inferir $\phi \to \psi$.

Regras da Dedução Natural

- Introdução da negação
  - De uma derivação de uma contradição $\bot$ a partir de uma hipótese ϕ, pode-se descartar a hipótese e inferir $\neg\phi$.
- Eliminação da negação
  - De uma derivação de uma contradição $\bot$ a partir de uma hipótese $\neg\phi$, pode-se descartar a hipótese e inferir ϕ.

Exercícios

- Prove que os seguintes argumentos são válidos:
  1. $\neg p \to (q \to r), \neg p, q \mid\!- r$
  2. $\neg p \to \neg\neg q, \neg\neg\neg p \mid\!- q$
  3. $p \to (q \wedge r), p \mid\!- p \wedge q$
  4. $(p \wedge q) \to (r \wedge s), \neg\neg p, q \mid\!- s$
  5. $p, \neg\neg(p \to q) \mid\!- (r \wedge s) \vee q$
  6. $(p \vee q) \wedge (p \vee r), p \to s, q \to s, p \to t, r \to t \mid\!- s \wedge t$
  7. $p \to q, (p \to q) \to (q \to p) \mid\!- p \leftrightarrow q$
  8. $p \to q, q \to r \mid\!- p \to r$
  9. $p \to q, \neg q \mid\!- \neg p$