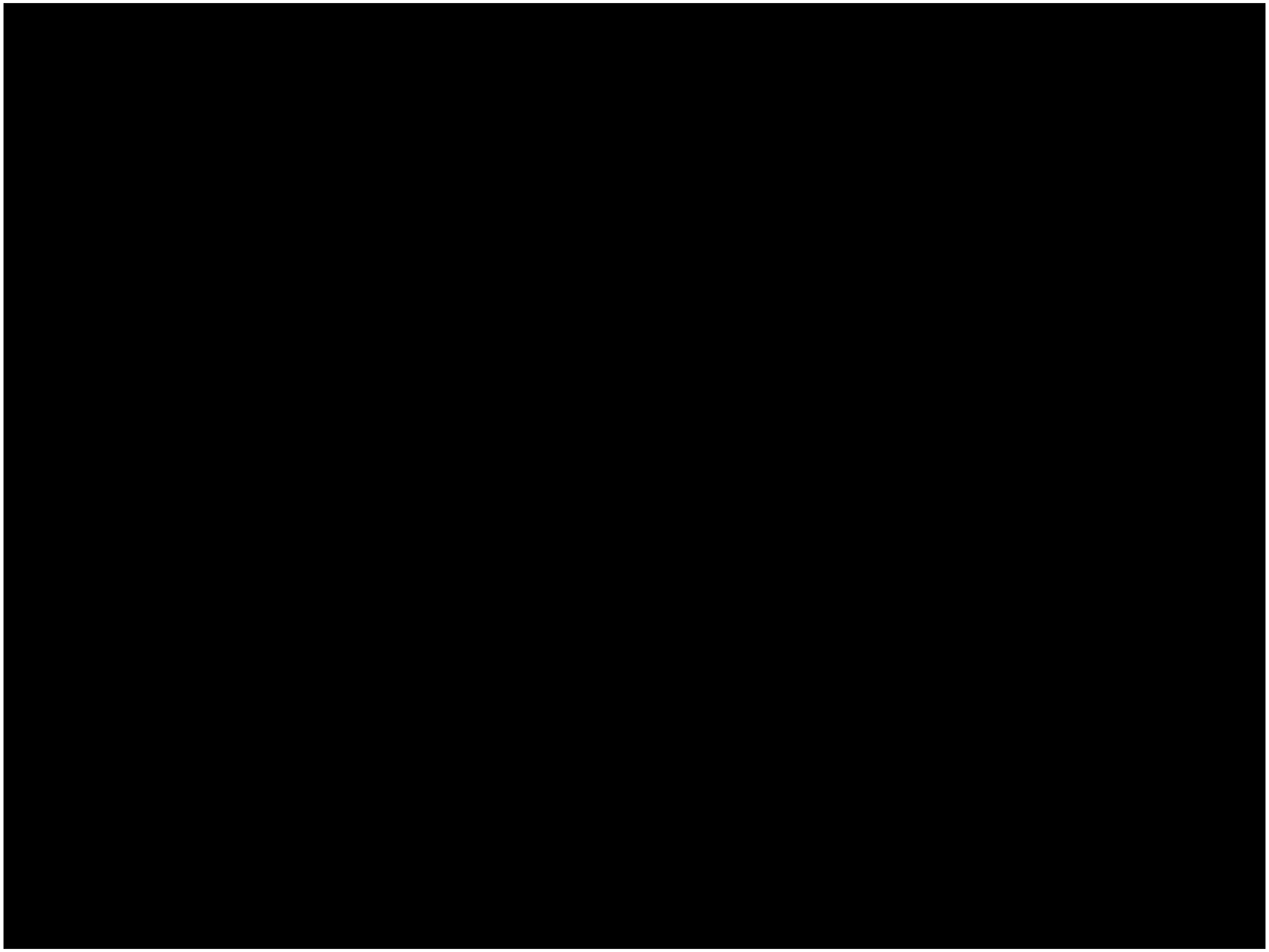
Modelagem



Modelagem

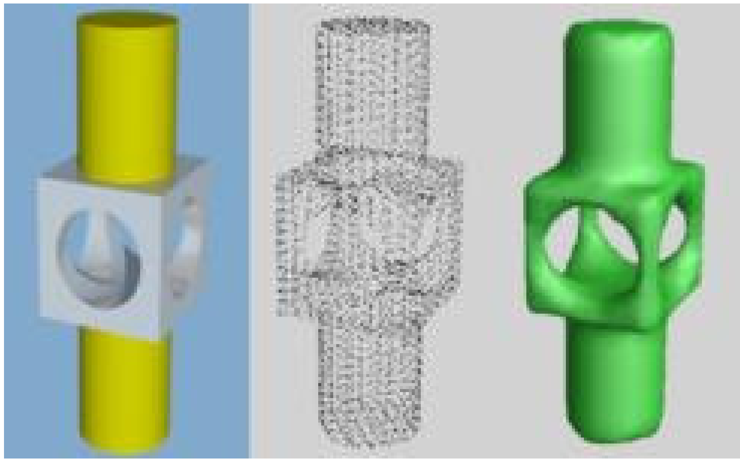
Modelagem Geométrica

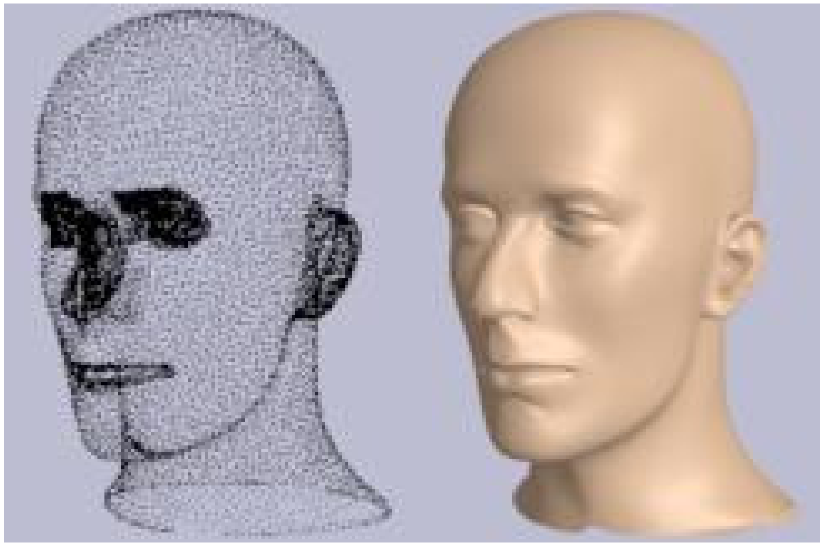
- Área da Computação Gráfica que estuda a criação de *modelos* dos objetos reais
  - Modelo? Para que?
- Como descrever/representar FORMA dos objetos (largura, altura, áreas,...)
- Coleção de Métodos Matemáticos

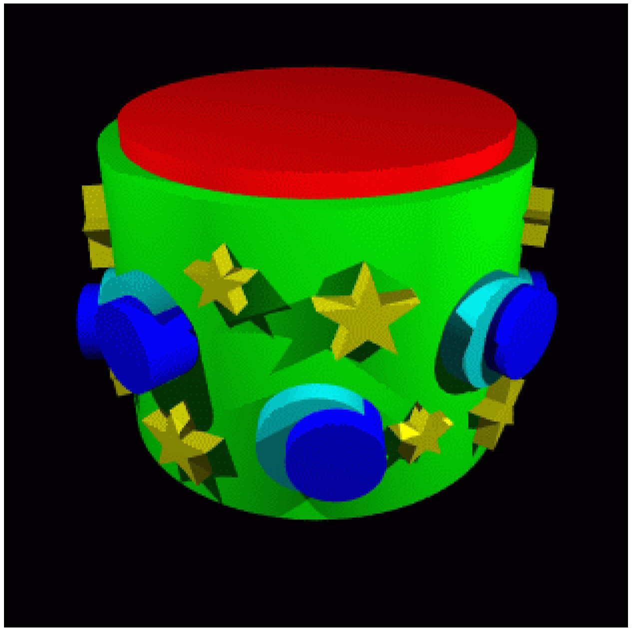
Objetivos

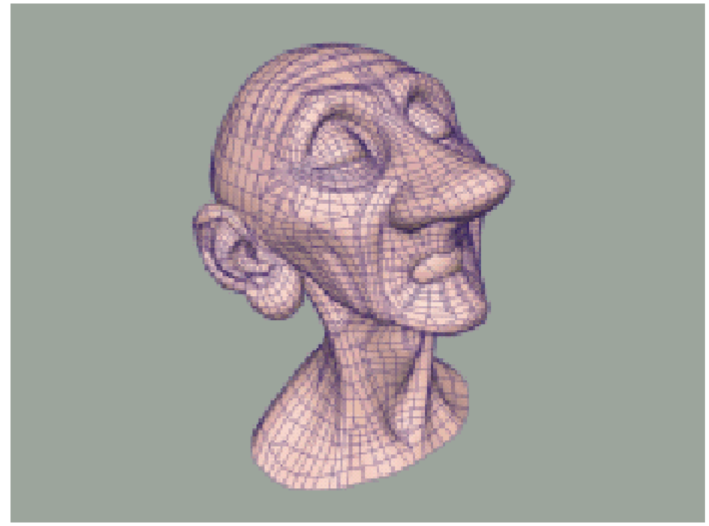
- Criar modelos de objetos, existentes ou ainda não existentes
- Prover maneiras de testá-los e confrontá-los com a realidade
- Exemplo da CAVE

Galeria

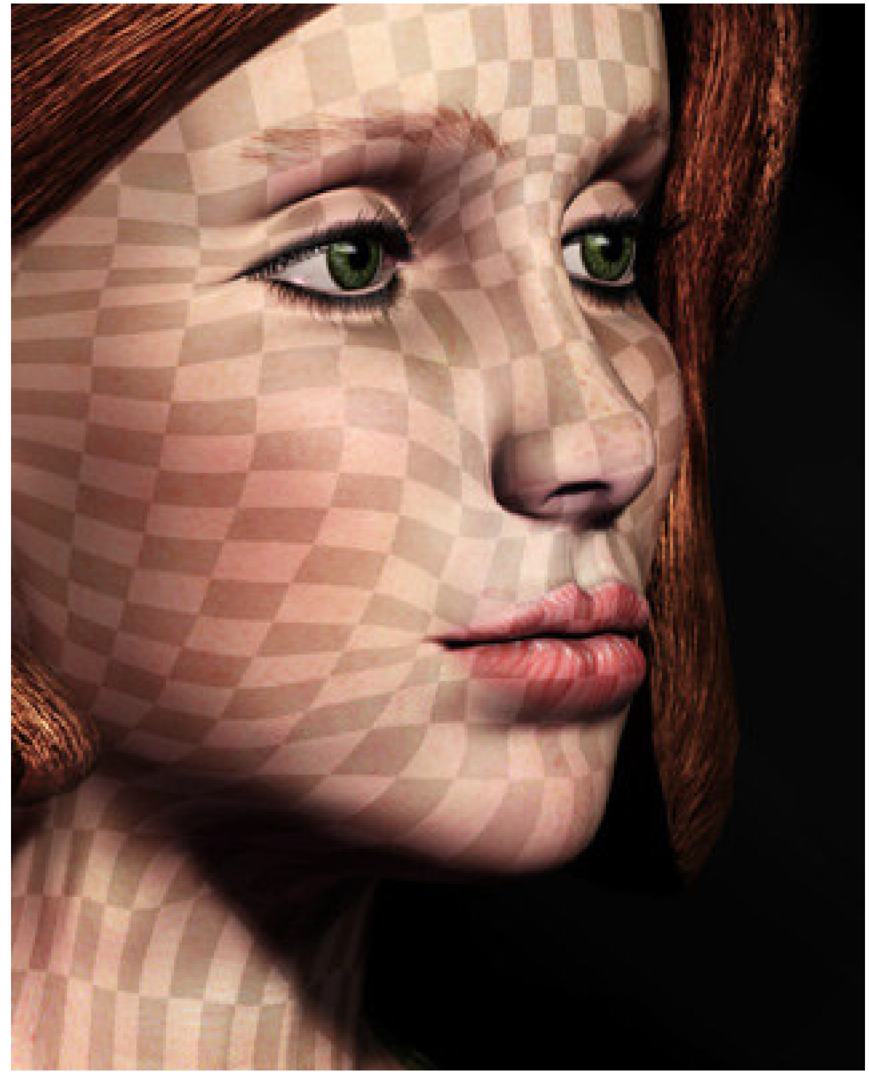


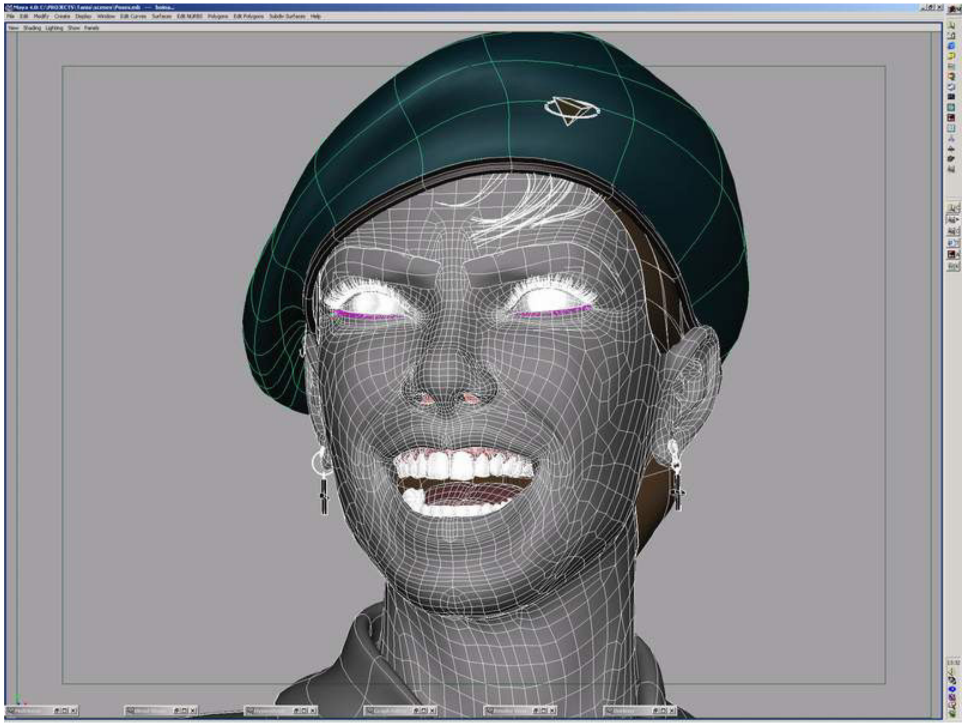






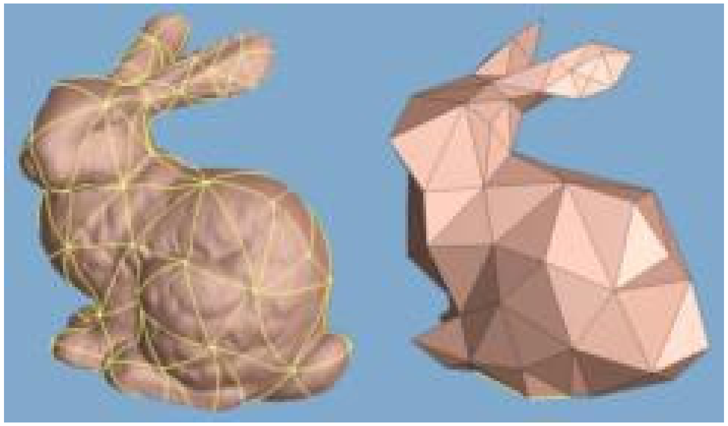

Designed by Martin Vaněk





Áreas de Aplicação

- Precisão/Exatidão Matemática
  - CAD/CAM
  - Indústria em Geral
- Precisão Visual
  - Entretenimento em geral
  - Jogos



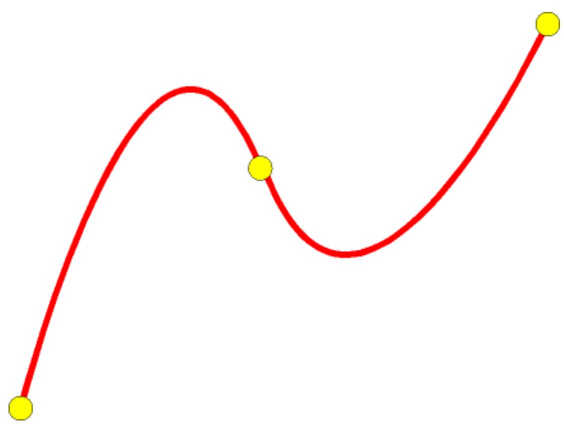
- Várias representações para o mesmo objeto (Level-of-Detail)

Surfaces

3D Studio Max

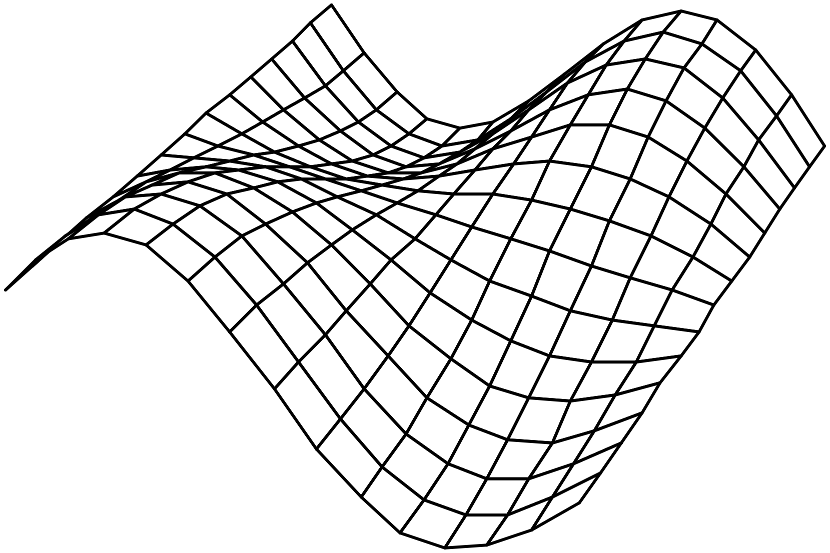
Classificação

- Curvas
  – apenas comprimento



Classificação

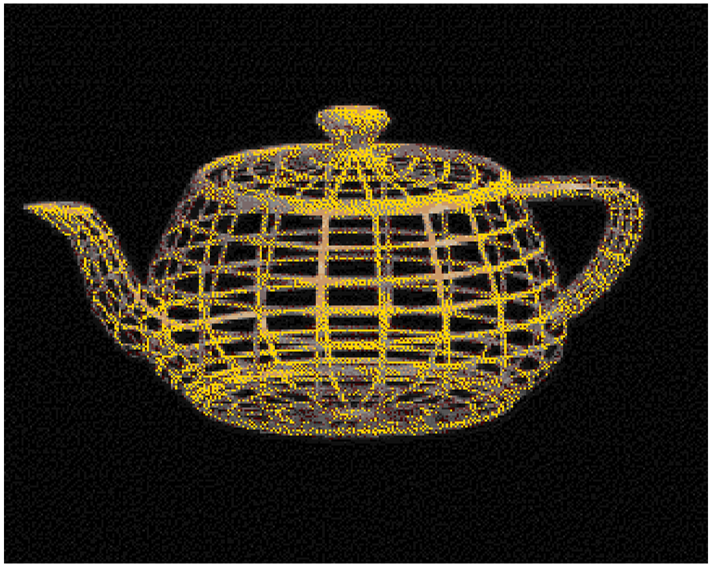
- Superfícies
  - apenas área
  - cascas infinitesimalmente finas, ocas
  - abertas ou fechadas



Classificação

- Sólidos
  - o interior também interessa

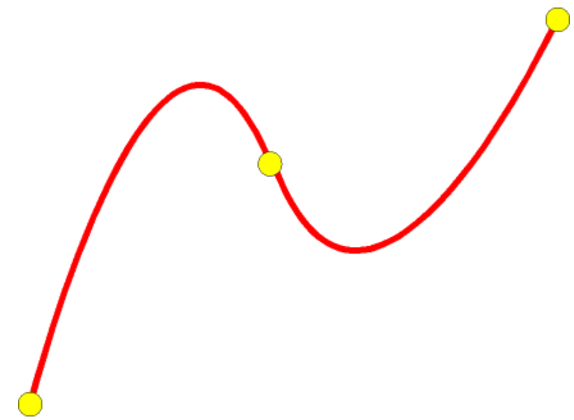
Isto é um sólido?



Teapot (Martin Newell 1975)

Como podemos representar uma curva?

- Localização no espaço de um ponto que se move
- Como podemos descrever este conceito?



Tipos de Representação (2D)

- Explícita

$$y = f(x)$$

$$y = 3x^2$$

- Limitações: Não é possível se obter 2 valores diferentes de y para um mesmo x

Tipos de Representação (2D)

- Explícita

$$y = f(x)$$

$$y = 3x^2$$

- Implícita

$$f(x, y) = 0$$

$$x^2 + y^2 = 0$$

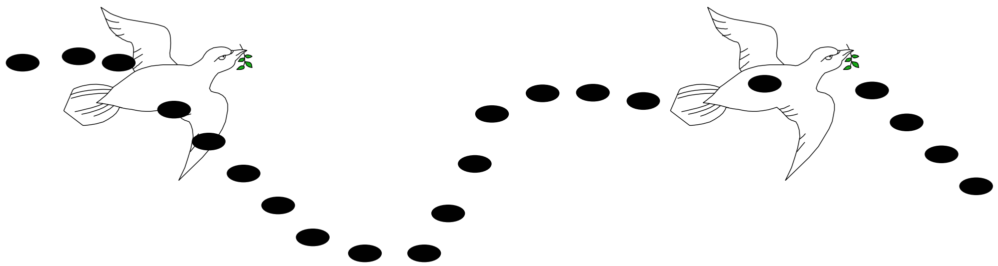
Tipos de Representação (2D)

- Explícita
- Implícita
- Representações são dependentes do sistema de coordenadas (x,y)

Representação Paramétrica

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$



$$x(t) = t^2$$

$$y(t) = t$$

Onde está o pássaro no tempo t?

Dependentes de t...

Possibilidades de Representações

- Alguns objetos podem ter mais de uma possibilidade para serem representados
- Exemplo: círculo centrado na origem com raio=1

$$x^2 + y^2 = 1$$

Implícita

$$x(\theta) = \cos\theta$$
$$y(\theta) = \operatorname{sen}\theta$$

Paramétrica

Curvas e Superfícies (Sólidos na próxima aula)

- Para aplicações de CG normalmente é mais conveniente adotar a forma paramétrica
- Independente do sistema de coordenadas

Curvas Paramétricas

- Curva genérica em 3D

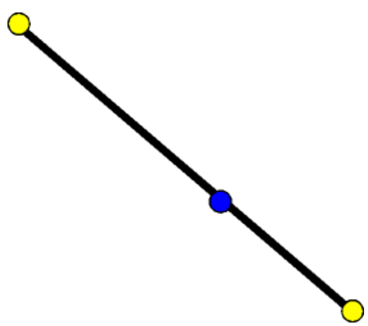
$$Q(t) = [x(t)\, y(t)\, z(t)]$$

- x(t), y(t) e z(t) são denominadas Funções-Base (*Base Functions*)

Funções de Base

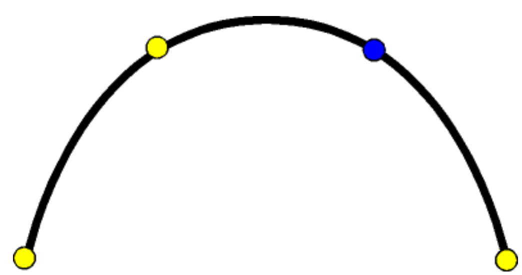
- Normalmente polinômios de grau 3
- Porque grau 3?
  - Grau 0 = nenhuma inflexão
  - Grau 4 = custo computacional

$$f(t) = at + b$$



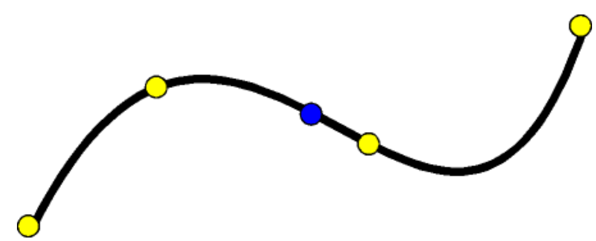
Linear

$$f(t) = at^2 + bt + c$$



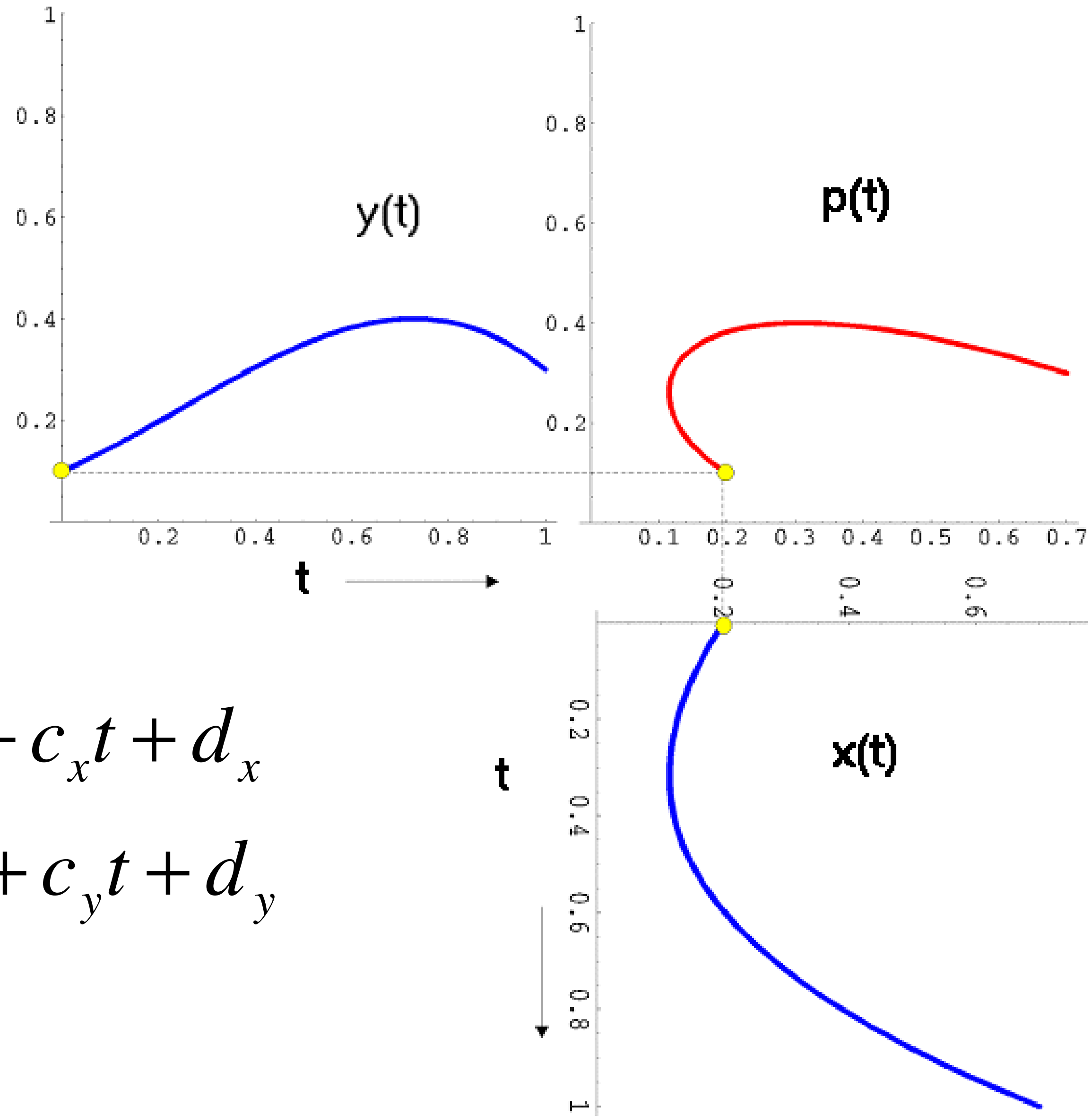
Quadratic

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$



Cubic

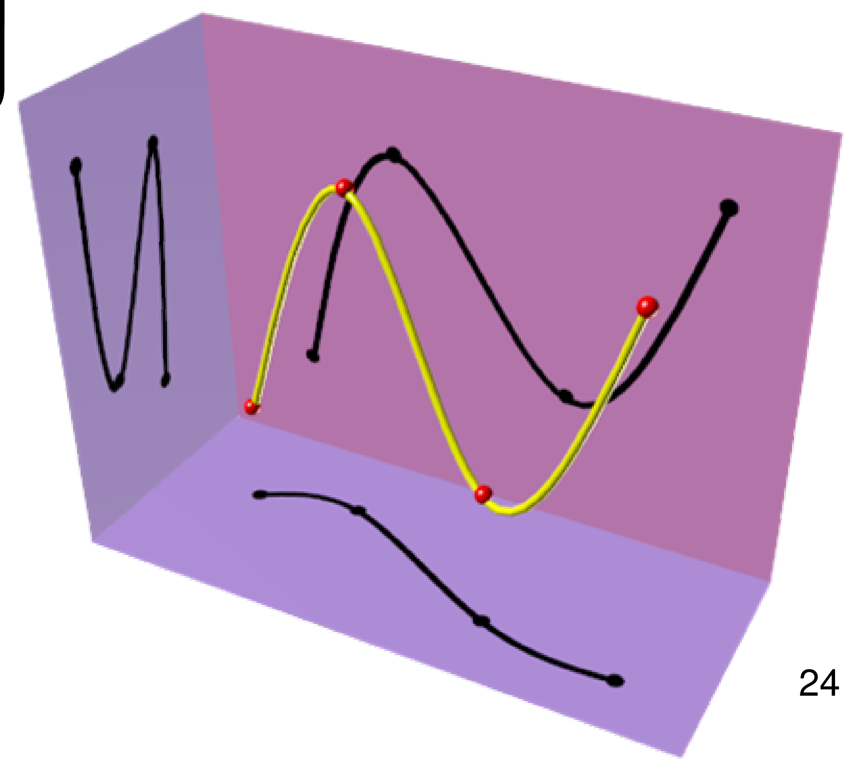
Curvas Paramétricas Cúbicas 2D



$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

Em 3D

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned}\right\}$$

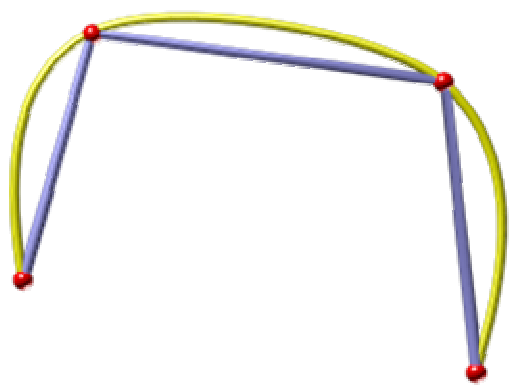


Como especificar estas curvas?

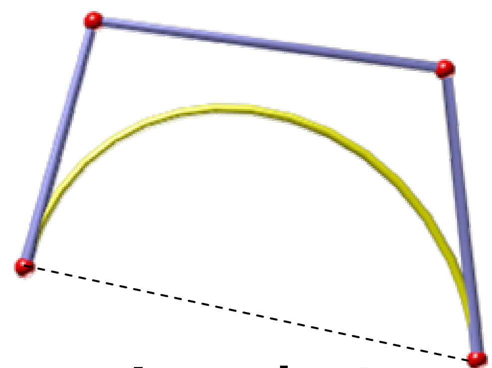
- Diretamente através dos 12 valores (ax,bx,cx,...,cz,dz)
- Indiretamente, procurando facilitar a tarefa para o usuário
- Diferença entre pontos que APROXIMAM uma curva e pontos que INTERPOLAM

Aproximação x Interpolação

- Dado um número *n* de pontos para traçar uma curva:
  - ***interpolar*** os pontos (curva passando por todos os pontos)
  - ***approximar*** os pontos (pontos definem *convex hull* da curva)



Interpolate



Approximate

Representando curvas

- Métodos para representar curvas:
  - Hermite
  - Bézier Curves
  - B-splines

Representando Segmentos de Curvas

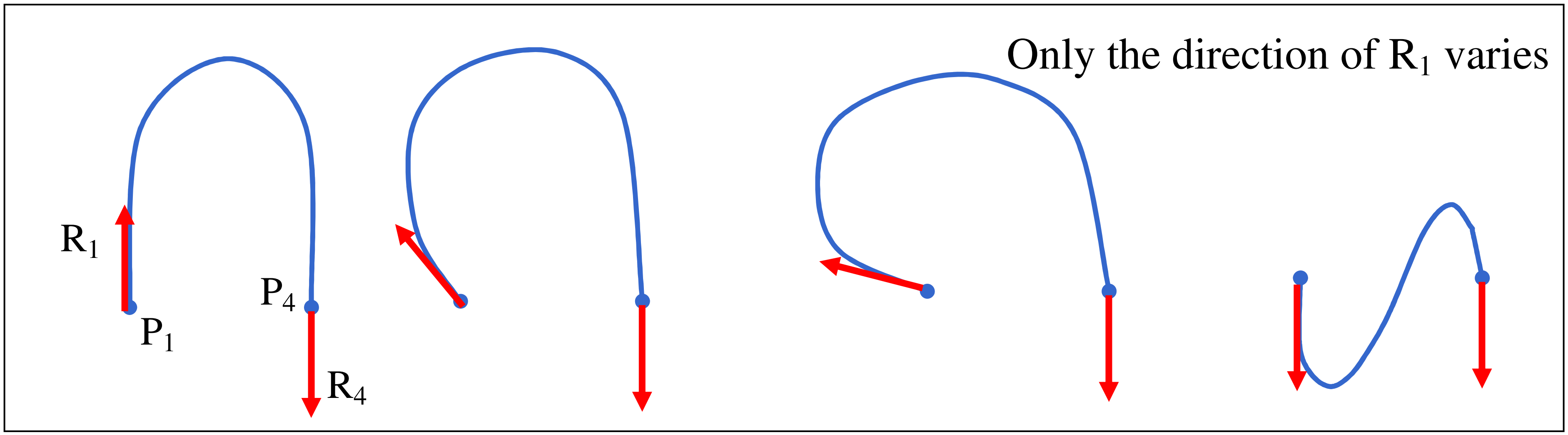
- Cada polinômio cúbico tem 4 coeficientes, logo 4 condições são necessárias

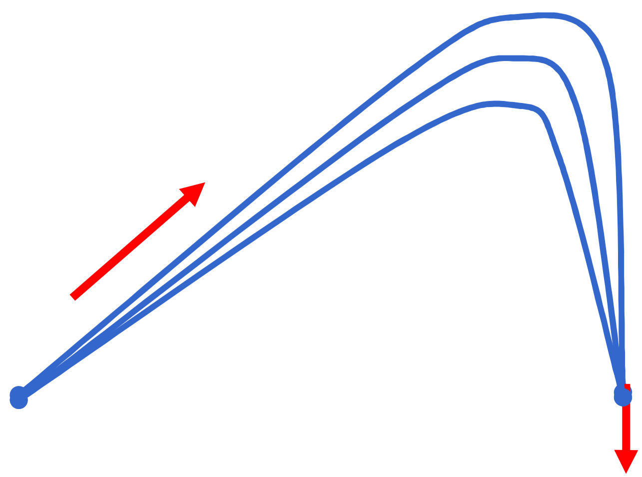
$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Curvas Hermite

- A curva de Hermite é determinada por restrições no primeiro e último pontos
- P_1 e P_4
- Vetores tangentes a P_1 e P_4: R_1 and R_4.

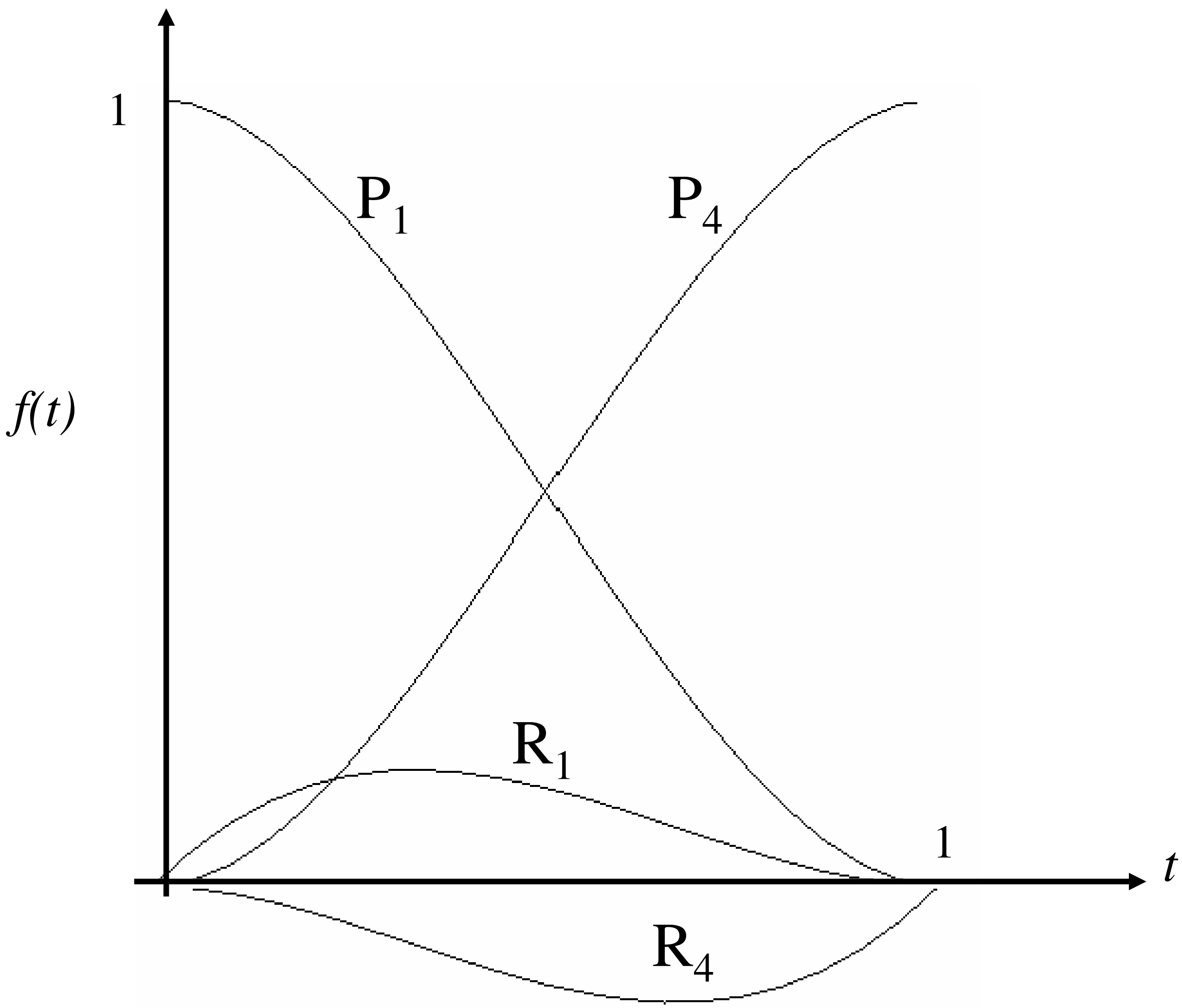
Exemplos de Curvas Hermite





Only the magnitude of R_1 varies

Funções de Mistura Hermite



Como descobrir a,b,c e d?

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

Curvas Bézier

- As curvas de Bézier (definidas por Pierre Bézier no início dos anos 70) são definidas por pontos P1 e P4 e também por dois pontos intermediários: P2 e P3
- Existe uma relação entre Hermite e Bézier: os vetores tangentes iniciais e finais são determinados pelos vetores P_1P_2 e P_3P_4 e são relacionados com R_1 e R_4 na Hermite da seguinte forma:

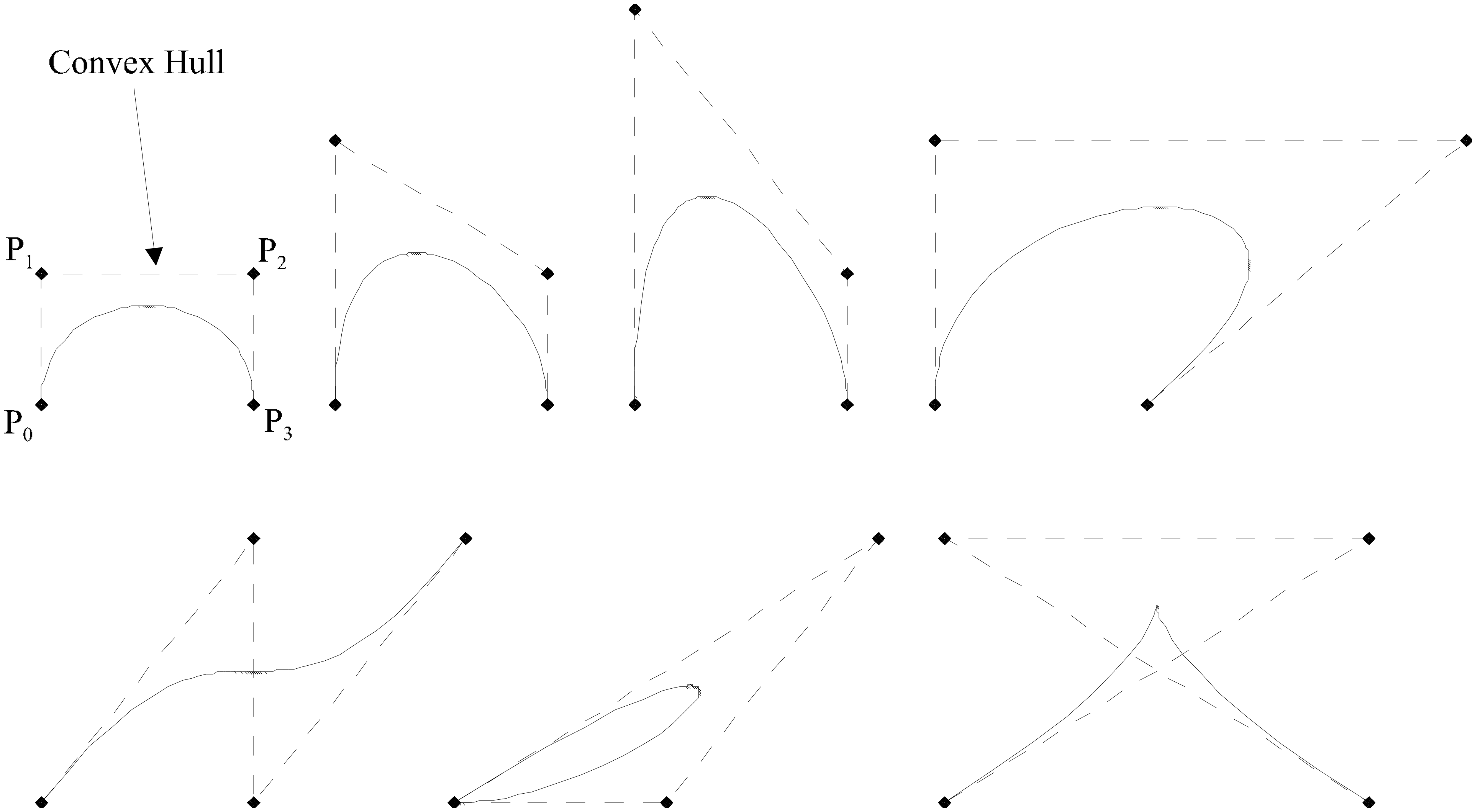
$$R_1 = p'(0) = 3(P_2 - P_1)$$

$$R_4 = p'(1) = 3(P_4 - P_3)$$

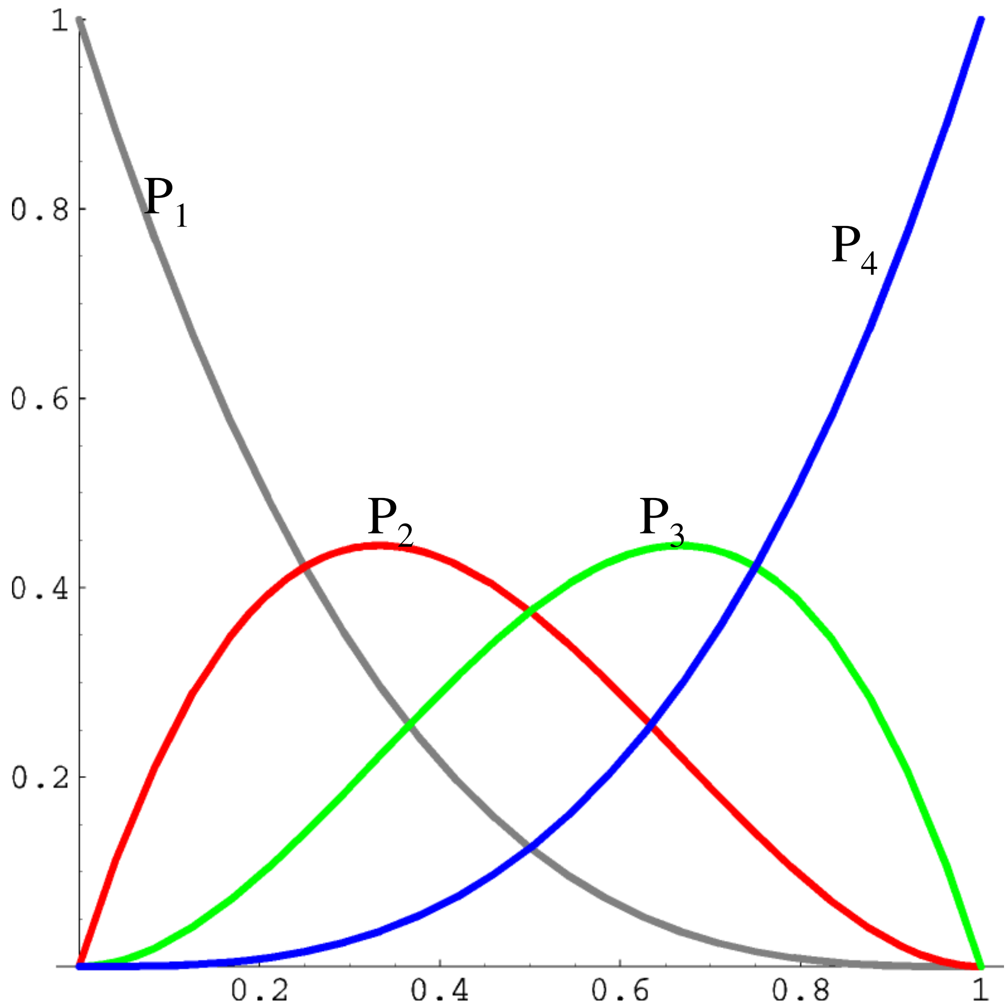
Curvas Bézier

- A razão para usar a constante 3?

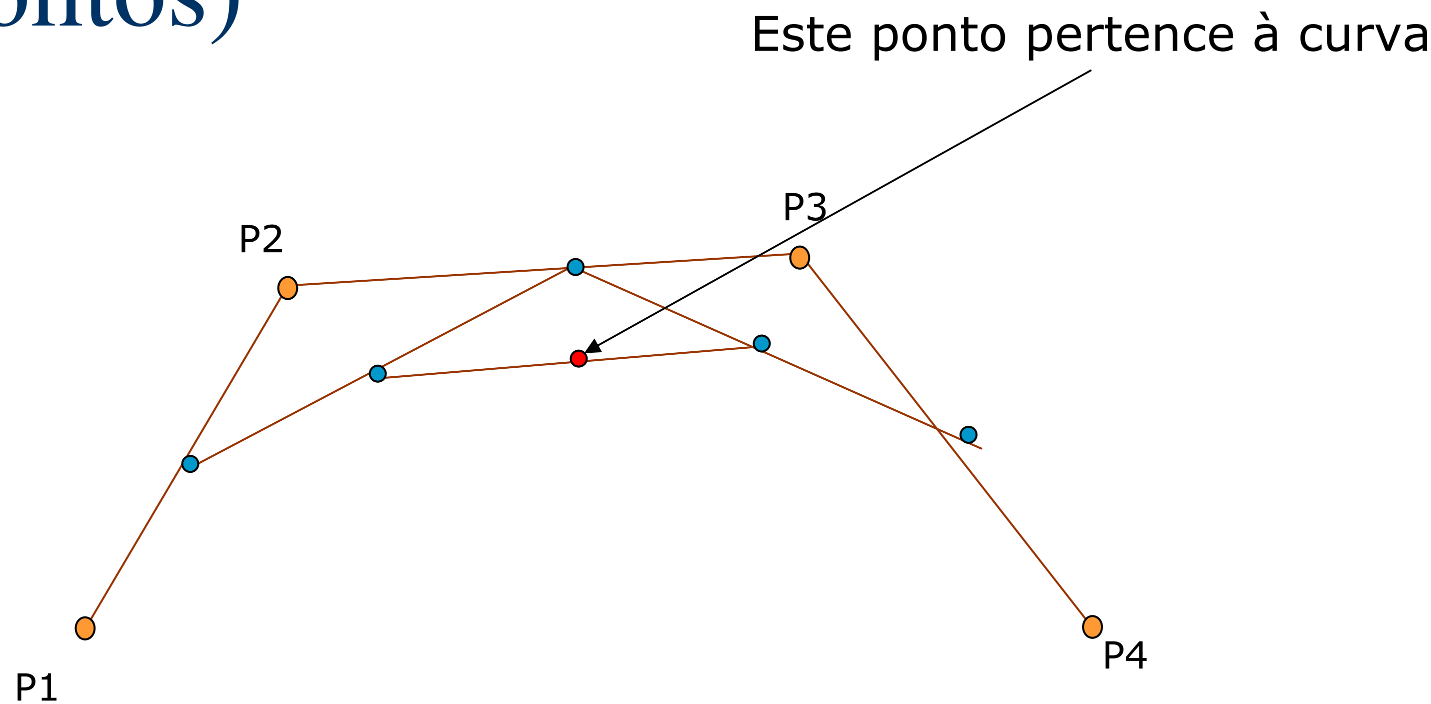
Exemplos



Bernstein Polynomials



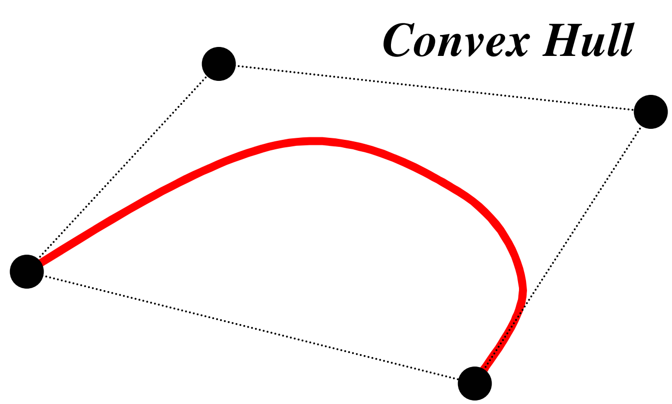
Casteljau (Paul – a partir de conjunto de pontos)



Os pontos da curva são os últimos pontos gerados no processo de subdivisão

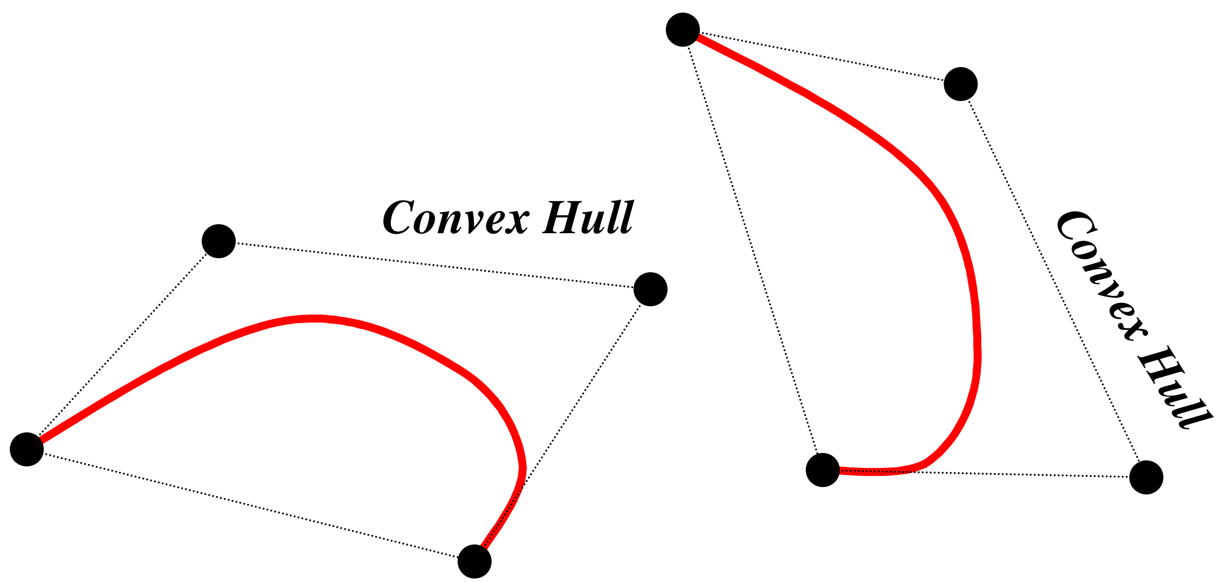
Propriedade de *Convex Hull*

- A curva de Bézier está completamente dentro do maior polígono convexo, formado pelos pontos de controle



Propriedade de *Convex Hull*

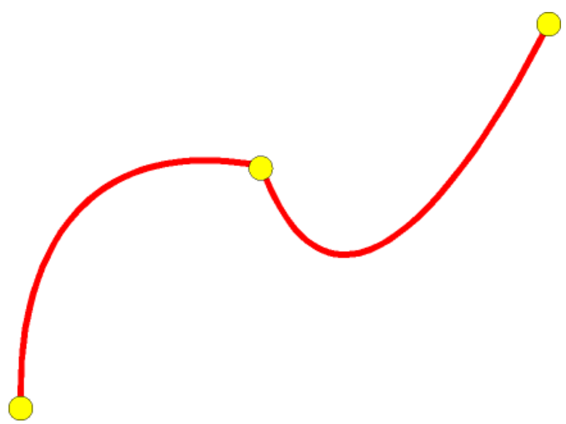
- Tranformações (S,R,T) na curva é igual a realizar as transformações nos pontos de controle



Continuidade

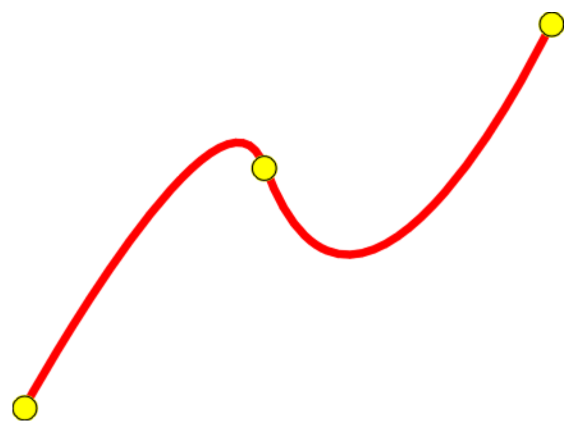
- Para assegurar a continuidade entre segmentos de curva, definem-se restrições adicionais de continuidade:
- 2 tipos de continuidade:
  - *Continuidade paramétrica*, denotada por C^n onde n = grau de continuidade
  - *Continuidade geométrica*, denotada por G^n

Exemplos de Continuidade



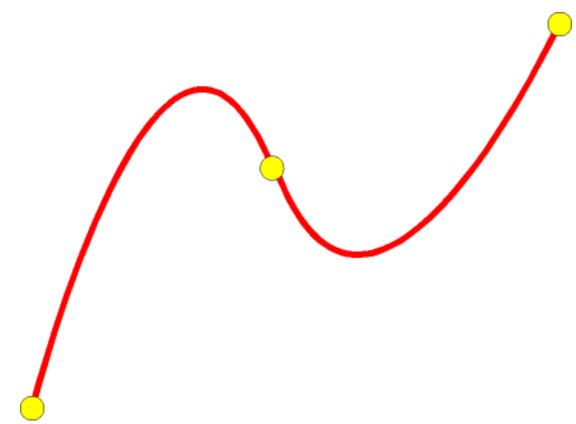
Continuidade Geométrica G0

Dois segmentos se encontram
Em um ponto



Continuidade Geométrica G1

Direção das tangentes dos
segmentos são
iguais no ponto de junção



Continuidade Paramétrica C1

Direção e magnitude das
tangentes dos segmentos
são iguais no ponto de junção

B-Splines

- Origem da palavra… termo spline…longas tiras flexíveis de metal que garantem a mínima enegia da deformação
- Diferença da SPLINE
- Porque são melhores? Porque fornecem suporte local e mais controle (ao contrário da Bézier que por mínima mudança nos pontos de controle, gera uma nova curva)
  - Parâmetros != 0 apenas numa vizinhança local
- Mais fácil garantir continuidade paramétrica
  - União de segmentos

B-Splines

- Genericamente:
  - Para m+1 pontos de controle
    - M>=3 P0,P1,..,Pn
  - Teremos curvas com m-2 segmentos
    - Q3,Q4,..,Qm
- Cada um dos m-2 segmentos é definido por 4 dos m+1 pontos de controle

B-Splines

- M+1 control points (sendo m>=3)
  – Ex: control points = 9
- M-2 Segmentos de curva
  – Q3,…,Q9
- Segmento Qi = Pi-3,Pi-2,Pi-1,Pi
  – Q3 = P0,P1,P2,P3
  – Q4 = P1,P2,P3,P4
  – Q5 = P2,P3,P4,P5
  – Q6 = P3,P4,P5,P6
  - Q7=P4,P5,P6,P7
  - Q8=P5,P6,P7,P8
  - Q9=P6,P7,P8,P9

B-Splines

- Cada segmento é definido por 4 pontos, cada ponto influencia 4 segmentos de curva (exceto P0 e Pm)
- Knots são os pontos de junção entre os segmentos de curva
- Pg. 492 Folley

B-Splines Uniformes

- B-Splines uniformes
- Significa que a variável paramétrica está espaçada em intervalos uniformes
- Como fazer B-spline fechada??

B-Splines Uniformes

- Problema: como definir as funções de blending para as B-Splines???

  – Considerando as propriedades desejadas:convex hull, continuidade nas junções…
- Derivação encontrada no Bartels, Bratly and Barsky, 87

B-Splines Uniformes

$$Q(t) = \frac{(1-t)^3}{6} Pi-3 + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} Pi-2 +$$

$$\frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} Pi-1 + \frac{t^3}{6} Pi$$

$$0 <= t <= 1$$

B-Splines Não-Uniformes

- O intervalo geométrico entre valores dos nós não é necessariamente uniforme…

- Logo as funções de blending não são as mesmas para cada segmento…. Maior flexibilidade

- Podemos escolher a continuidade (vantagem sobre uniformes) pg. 500 - Folley

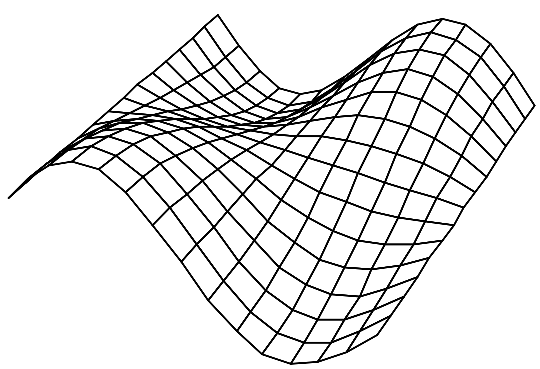
B-Splines Não-Uniformes

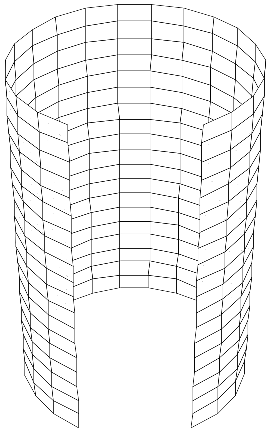
NURBS??? Non-uniforme rational B-splines

- Rational significa que os segmentos de curva podem ser expressos por razões entre polinômios cúbicos
- Ex: $x(t) = x(t)/w(t)$
- Vantagens: na forma racional utiliza coordenadas homogêneas e características de geometria projetiva (quer dizer que são invariantes como translação, rotação, escala e projeções paralela e perspectiva)

Superfícies Paramétricas

- Idéia de *multiplicação* de 2 curvas
- A informação geométrica que define uma curva passa a ser ela própria uma função de uma variável paramétrica





Superfícies paramétricas

- A forma geral de uma superfície 3D na sua representação paramétrica é:

$$f(u,v) = (f_x(u,v), f_y(u,v), f_z(u,v))$$

Malhas de Polígonos

- Coleção de arestas, vértices e polígonos conectados
- Diferentes formas de armazenar a estrutura do polígono
  - Vertex list + faces list
  - Vertex list + edges list + faces list

  ****Como é representada a topologia???
- Existem duas formas de representar malhas de polígonos:
  - Forma paramétrica (= explícita)
  - Ponteiros para listas de dados

Representação Explícita de polígonos

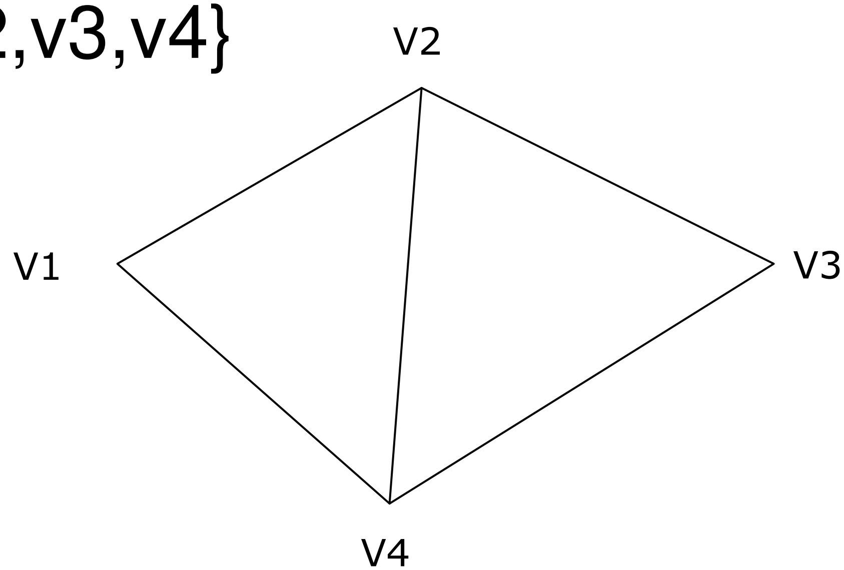
- P = (v1,v2,v3,.., vn)
- P = ((x1,y1,z1),(x2,y2,z2),(x3,y3,z3),…)

No caso de um simples polígono, como fica a topologia? Vértices são repetidos?

E no caso de malhas de polígonos?

Ponteiros para listas de dados

- Ponteiros para lista de vértices
  - V = {v1,v2,v3,v4}}
  - P1 = {v1,v2,v4}
  - P2 = {v2,v3,v4}



Ponteiros para listas de dados

- Ponteiros para lista de vértices e arestas
  - V = {v1,v2,v3,v4}}
  - A1 = {v1,v2,P1}
  - A2 = {v2,v3,P2}
  - A3 = {v3,v4,P2}
  - A4 = {v4,v1,P1}
  - A5 = {v2,v4,P1,P2}
  - P1 = {A1,A2,A3}
  - P2 = {A4,A4,A5}